

# Énoncé

UNIVERSITÉ DE LILLE III – UFR des LEA

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010 – 2011

LICENCE 1 – SEMESTRE 1 – SESSION 2

NOM DE LA DISCIPLINE : **Mathématiques**

DUREE : 1h

TYPE D'EXERCICE : Exercices et/ou questions.

DOCUMENTS AUTORISÉS : Calculatrice non programmable.

**page 1 / 1**

*Les trois exercices sont indépendants. Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez. La notation prendra en compte les qualités de la rédaction (clarté, lisibilité, orthographe...).*

*Les indices et pourcentages seront arrondis à un chiffre après la virgule. Les sommes en euros seront arrondies au centime le plus proche et les taux d'intérêt à 0,01 %.*

## Exercice n° 1

Quatre personnes ont acheté un séjour touristique pour un prix global de 4 760 €. Sachant qu'elles ont bénéficié d'une remise de 15 %, quel était le prix par voyageur avant la réduction ?

---

## Exercice n° 2

Le tableau suivant retrace l'évolution de la production allemande d'électricité d'origine éolienne (en milliards de kilowattheures – source : *US Energy Information Administration*) :

Année	2006	2007	2008	2009
Production (TWh)	29,17	37,72	38,55	35,92

- 1) Quel est le pourcentage global de variation de la production entre 2006 et 2009 ?
- 2) Calculez les indices de la production, base 100 en 2006.
- 3) Quel est le pourcentage moyen annuel de croissance de la production entre 2006 et 2009 ?
- 4) Si ce pourcentage se maintenait, au bout de combien d'années la production doublerait-elle ?

---

## Exercice n° 3

- 1) Le 2 mars 2011, un particulier a déposé 3 000 € sur un compte bancaire rémunéré à 2,25 % par an.  
Calculez les intérêts et la valeur acquise au 31 mai 2011.
- 2) Le 31 mai 2000, un particulier a déposé une somme de 20 000 € sur un compte rémunéré à 3,75 % par an.  
Calculez la valeur acquise et les intérêts au 31 mai 2011.
- 3) Calculez le taux d'intérêt annuel équivalent et le taux d'intérêt annuel proportionnel à 0,30 % par mois. Quelle est la différence entre ces deux taux ?
- 4) Depuis le 31 mai 2000, un particulier dépose chaque année à la même date une somme de 2 000 € sur un compte rémunéré à 3,75 % par an.
  - a. Quelle est la valeur acquise juste après le versement du 31 mai 2011 ?
  - b. Quel est le montant total du capital épargné ?
  - c. Quel est le total des intérêts ?

# Corrigé

## Exercice n° 1

Le prix par personne, remise déduite, est :

$$\frac{4760}{4} = 1\,190 \text{ €.}$$

Le taux de remise est de 15 %, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur :

$$m = 1 - \frac{15}{100} = 0,85$$

Le prix par personne, avant la réduction, était donc :

$$\frac{1190}{0,85} = 1\,400 \text{ €.}$$

## Exercice n° 2

Dans cet exercice,  $G_t$  désignera la production allemande d'électricité éolienne pour l'année  $t$ .

- 1) Le pourcentage global de variation de la production entre 2006 et 2009 est :

$$p = 100 \cdot \frac{G_{2009} - G_{2006}}{G_{2006}} = 100 \times \frac{35,92 - 29,17}{29,17} \approx +23,1 \%$$

Entre 2006 et 2009, la production a globalement augmenté de 23,1 %.

- 2) La formule permettant de calculer l'indice de la production de l'année  $t$ , base 100 en 2006, est :

$$I_{t,2006} = 100 \times \frac{G_t}{G_{2006}}$$

Pour 2006 :  $I_{2006,2006} = 100$  (année de base).

$$\text{Pour 2007 : } I_{2007,2006} = 100 \times \frac{G_{2007}}{G_{2006}} = 100 \times \frac{37,72}{29,17} \approx 129,3$$

De même pour les autres années :

Année	2006	2007	2008	2009
Production (TWh)	29,17	37,72	38,55	35,92
Indice base 100 en 2006	100	129,3	132,2	123,1

- 3) Le pourcentage moyen annuel de croissance de la production entre 2006 et 2009 (sur  $n = 3$  ans) est :

$$p = 100 \cdot \left[ \left( \frac{G_{2009}}{G_{2006}} \right)^{1/n} - 1 \right] = 100 \times \left[ \left( \frac{35,92}{29,17} \right)^{1/3} - 1 \right] \approx +7,2 \%$$

Entre 2006 et 2009, la production a donc augmenté de 7,2 % par an en moyenne.

**On remarque que ce pourcentage ne s'obtient pas en divisant le pourcentage global de variation (23,1 %) par le nombre d'années (3) :  $23,1 / 3 = 7,7 \%$ .**

- 4) Si ce pourcentage se maintenait, nous serions dans une situation de croissance constante, avec comme valeur initiale  $G_{2006} = 29,17$  TWh et un coefficient multiplicateur annuel égal à :

$$m = 1 + \frac{7,2}{100} = 1,072$$

La production au bout de  $n$  années serait donc :

$$G_{2006+n} = G_{2006} \cdot m^n = G_{2006} \cdot 1,072^n$$

Nous souhaitons que la production double, donc que :

$$G_{2006+n} = 2 \cdot G_{2006}$$

$$\text{Soit encore : } G_{2006} \cdot 1,072^n = 2 \cdot G_{2006}$$

$$\text{En simplifiant par la valeur initiale : } 1,072^n = 2$$

On prend les logarithmes des deux membres :

$$\ln(1,072^n) = \ln(2)$$

$$n \cdot \ln(1,072) = \ln(2) \text{ car } \ln(a^n) = n \cdot \ln(a) \text{ d'où :}$$

$$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1,072)} \approx 9,97$$

Si la croissance observée sur la période 2006-2009 se poursuivait, la production doublerait tous les 10 ans.

**En fait, le choix de l'année de départ n'influe pas sur ce résultat : nous aurions aussi bien pu partir de de 2009.**

---

### Exercice n° 3

**Dans les exercices de mathématiques financières, le plus important est d'analyser correctement la situation : s'agit-il d'une opération à court terme (moins d'un an) ou à long terme (plus d'un an) ? Y a-t-il un seul ou plusieurs versements ? Quelles sont les données et quelles sont les inconnues ?**

- 1) Il s'agit d'un placement qui dure moins d'un an, donc à intérêts simples. Comme il est effectué sur un compte bancaire, les intérêts sont calculés proportionnellement au nombre de jours :  
Capital placé :  $C = 3\,000$  €.  
Taux annuel d'intérêt :  $i = 2,25$  %.  
Durée du placement :  $N = 30 + 30 + 30 = 90$  jours.  
Les intérêts au 31 mai 2011 sont donc :  
$$I = C \cdot i \cdot \frac{N}{360} = 3000 \times \frac{2,25}{100} \times \frac{90}{360} \approx 16,88 \text{ €}.$$
La valeur acquise est la somme du capital et des intérêts :  
 $V = C + I = 3000 + 16,88 = 3\,016,88$  €.
- 2) Il s'agit maintenant d'un placement qui dure plus d'un an, donc à intérêts composés :  
Capital placé :  $C = 20\,000$  €.  
Taux annuel d'intérêt :  $i = 3,75$  %.  
Coefficient de capitalisation :  $m = 1 + \frac{3,75}{100} = 1,0375$   
Durée du placement :  $t = 11$  ans.  
 $V = C \cdot m^t = 20000 \times 1,0375^{11} \approx 29\,984,66$  €.  
La valeur acquise est  $V = C + I$ , donc les intérêts sont :  
 $I = V - C = 29984,66 - 20000 = 9\,984,66$  €.
- 3) Le taux annuel  $i$  équivalent au taux mensuel  $i_m = 0,30$  % est défini par :  
$$1 + i = (1 + i_m)^{12}$$
Donc :  $i = (1 + i_m)^{12} - 1 = \left(1 + \frac{0,30}{100}\right)^{12} - 1 \approx 0,0366$  soit 3,66 %.  
Le taux annuel proportionnel au taux mensuel  $i_m = 0,30$  % est défini par :  
 $i = 12 \cdot i_m = 12 \times 0,30\% = 3,60$  %  
Le taux équivalent s'utilise dans un contexte d'intérêts composés (donc pour des placements à long terme). Le taux proportionnel s'utilise en intérêts simples (donc pour des opérations à court terme).
- 4) Il s'agit maintenant d'épargne par versement d'annuités constantes.  
Montant de l'annuité :  $a = 2\,000$  €  
Taux annuel d'intérêt :  $i = 3,75$  %  
Nombre d'annuités :  $n = 11 + 1 = 12$ 
  - a. La valeur acquise juste après le versement du 31 mai 2011 est :  
$$V = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 2000 \cdot \frac{(1+0,0375)^{12} - 1}{0,0375} \approx 29\,624,23 \text{ €}$$
Cette somme se décompose en :
    - b.  $12 \times 2000 = 24\,000$  € de capital ;
    - c. et  $29624,23 - 24000 = 5\,624,23$  € d'intérêts.