Énoncé

UNIVERSITE DE LILLE III – UFR des L.E.A.

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010 – 2011

LICENCE 1 – SEMESTRE 2 – SESSION 1

NOM DE LA DISCIPLINE : **Mathématiques**

DUREE : 2 h

TYPE D'EXERCICE : Exercices et/ou questions

DOCUMENTS AUTORISES : Calculatrice non programmable

À JOINDRE AU SUJET : 2 feuilles de papier millimétré.

N'oubliez pas de reporter votre numéro de carte au dos des feuilles de papier millimétré. Il y a trois graphiques à réaliser. Veuillez donc respecter les indications de l'énoncé afin de pouvoir en placer deux sur la même feuille.
Les trois exercices sont indépendants. Il n'est pas obligatoire de les traiter dans l'ordre de l'énoncé.
Rédigez soigneusement mais de façon concise. Tout résultat doit être justifié, notamment en indiquant la formule utilisée.

Exercice n° 1

Une entreprise produit un bien dans les conditions suivantes :

- Le coût total de fabrication est fonction de la quantité produite q :
  $\boldsymbol{C_t(q) = 0{,}1\, q^2 + 25\, q + 3360}$
- Le prix de vente unitaire est constant :
  $\boldsymbol{p_u = 75}$ **€**.
- On suppose que les variations de stocks sont nulles.

1. Étudiez la fonction de coût total C_t.
2. Représentez-la graphiquement.
   Échelle : 1 cm pour 50 unités en abscisses ; 1 cm pour 2 500 € en ordonnées. Vous vous limiterez aux valeurs de q comprises entre 0 et 500.
3. Exprimez la fonction de recette totale en fonction de la quantité produite.
4. Représentez-la sur le graphique précédent.
5. Montrez que le bénéfice total peut s'écrire de la façon suivante :
   $\boldsymbol{B(q) = -0{,}1\, q^2 + 50\, q - 3360}$.
6. Par le calcul, déterminez les valeurs de la quantité pour lesquelles la production est rentable. Vérifiez sur le graphique **(rédigez votre réponse)**.
7. Déterminez par le calcul la quantité pour laquelle le bénéfice est maximal. Quelle est la valeur de ce maximum ?

Exercice n° 2

On a relevé le prix d'un article dans un échantillon de 200 magasins :

Prix (€)	[20 ; 30 [	[30 ; 32 [	[32 ; 34 [	[34 ; 36 [	[36 ; 40 [
Nombre de magasins	45	35	60	40	20

1. Représentez graphiquement cette série sous la forme d'un histogramme.
   Échelle : en abscisses, 1 cm pour 2 € ; en ordonnées, au choix.
2. À partir du graphique, indiquez quel est le prix modal.
3. Calculez la moyenne, l'écart type et le coefficient de variation (**détaillez les calculs**).
4. En vous aidant de l'histogramme, des indicateurs que vous avez déterminés et des quartiles (on donne : $Q_1 \approx$ 30,30 €, $Q_2 \approx$ 32,70 €, $Q_3 \approx$ 34,50 €), commentez cette distribution.

Exercice n° 3

Pour un échantillon de huit cliniques, on a relevé le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits :

Clinique	A	B	C	D	E	F	G	H
Nombre de lits	130	120	90	180	180	110	80	130
Nombre de postes	180	210	120	240	250	130	120	170

1. On souhaite représenter ces données sous la forme d'un nuage de points. Quelle variable est-il préférable de placer en abscisses ? et en ordonnées ? **Justifiez votre réponse.**
2. Construisez le nuage de points.
   Échelle : 1 cm pour 20 sur les deux axes.
3. Que permet-il de penser de la liaison entre les deux variables ?
4. On donne les indications suivantes :

	Nombre de lits	**Nombre de postes**
Total	1 020	1 420
Somme des carrés	139 600	271 200
Somme des produits	193 600	

   Déterminez une équation de la droite de régression du nombre de postes en fonction du nombre de lits (**détaillez les calculs**).
5. Reportez la droite sur le graphique.
6. À partir du résultat de la question 4, estimez le nombre de postes nécessaires pour une clinique de 150 lits. Vérifiez le résultat sur le graphique.
7. Calculez le coefficient de corrélation linéaire entre nombre de postes et nombre de lits (**détaillez les calculs**).
8. Interprétez le résultat obtenu.

Corrigé

Exercice n° 1

1. Étude de la fonction C_t :
   - Ensemble de définition : [0 ; +∞ [
   - Dérivée : $C_t'(q)=0{,}1\times 2q+25\times 1+0=0{,}2\,q+25$
   - Signe de la dérivée :
     Comme $q \geqslant 0$, $0{,}2\,q \geqslant 0$ et $0{,}2\,q + 25 \geqslant 25 > 0$ donc $C_t'(q) > 0$.
     La fonction de coût total est donc strictement croissante sur [0 ; +∞ [.
   - Tableau de variations :

q	0	+∞
C$C_t'(q)$	+	
$C_t(q)$	3360 ↗	+∞

   $C_t(0)=0{,}1\times 0^2+25\times 0+3360=3360$

2. Pour tracer la courbe, il faut calculer les coordonnées de quelques points :

q	0	100	200	300	400	500
$C_t(q)$	3 360	6 860	12 360	19 860	29 360	40 860

Tableau 1 : tableau de valeurs de la fonction de coût total

   Voir le graphique 1 page suivante.

3. La recette totale s'obtient en multipliant le prix de vente unitaire (p_u = 75 €) par le nombre d'unités vendues. Si on fait l'hypothèse que les variations de stocks sont nulles, ce dernier est égal à la quantité produite q :
   $R_t(q)=p_u\cdot q=75\,q$

4. Il s'agit d'une fonction affine. Sa représentation graphique est donc une droite et il suffit de deux points pour la tracer :

q	0	500
$R_t(q)$	0	37 500

Tableau 2 : valeurs de la fonction de recette totale

   Voir le graphique 1.

5. Le bénéfice total est égal à la différence entre la recette totale et le coût total :
   $B(q)=R_t(q)-C_t(q)=75q-(0{,}1\,q^2+25\,q+3360)=75q-0{,}1\,q^2-25q-3360=-0{,}1\,q^2+50q-3360$
   On retrouve bien la forme proposée.

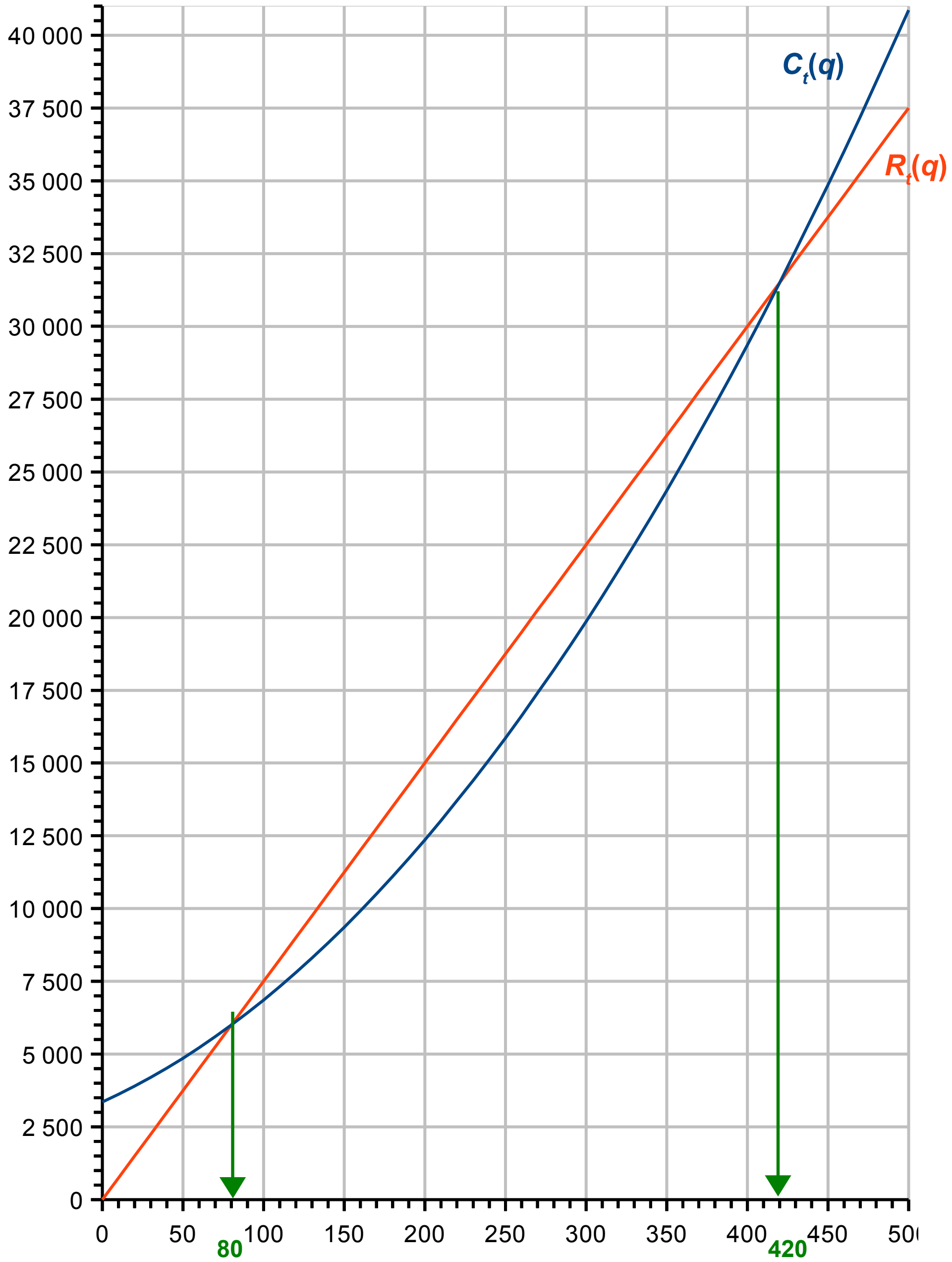
6. La production est rentable si $B(q)\geqslant 0$, soit si :
   $-0{,}1\,q^2+50\,q-3360\geqslant 0$
   Il s'agit d'une inéquation du deuxième degré, de coefficients a = –0,1, b = 50 et c = –3360. On calcule son discriminant :
   $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(50)^2-4\times(-0{,}1)\times(-3360)=1\ 156$
   Il est positif ; il y a donc deux racines :

$q_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50-\sqrt{1156}}{2\times(-0{,}1)} = 420$ et $q_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50+\sqrt{1156}}{2\times(-0{,}1)} = 80$

D'où le tableau de signes :

q	0		80		420		$+\infty$
$B(q)$		–	0	+	0	–	

La production est donc rentable si l'entreprise fabrique (et vend) entre 80 et 420 unités.
On peut vérifier ce résultat sur le graphique : la production est rentable si la recette totale est supérieure au coût total, donc si la droite de R_t est au-dessus de la courbe de C_t. C'est bien le cas si q est compris entre 80 et 420.



Graphique 1 : les fonctions de coût total et de recette totale.

7. Pour trouver le bénéfice maximal, il faut étudier la fonction B :
   - Ensemble de définition : [0 ; +∞ [

- Dérivée : $B'(q) = -0{,}1 \times 2q + 50 \times 1 - 0 = -0{,}2q + 50$
- Signe de la dérivée :
  On résout :
  $B'(q) = 0 \Leftrightarrow -0{,}2q + 50 = 0 \Leftrightarrow -0{,}2q = -50 \Leftrightarrow q = \dfrac{-50}{-0{,}2} = 250$
- Tableau de variations :

q	0	250	$+\infty$
B'(q)	+	0	–
B(q)	$\nearrow$	2890	$\searrow$

Le bénéfice est donc maximal pour une production de 250 unités. La valeur de ce maximum est : $B_{max} = B(250) = -0{,}1 \times 250^2 + 50 \times 250 - 3360 = 2\ 890$ €.

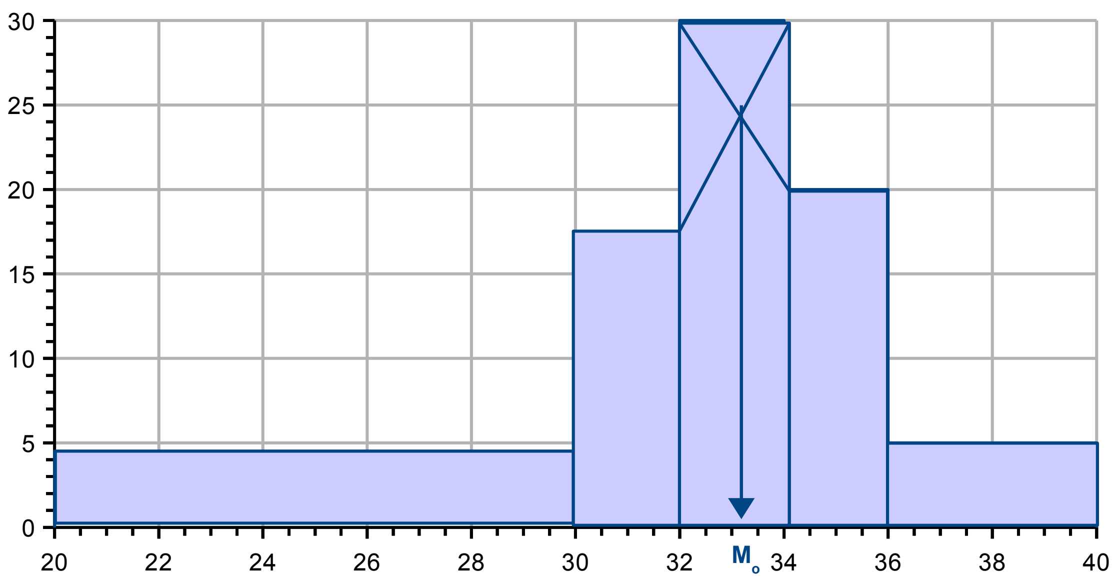
Exercice n° 2

1. Comme nos intervalles n'ont pas tous la même largeur, pour représenter graphiquement la série, il faut calculer les amplitudes et les densités des différentes classes :

Prix (€)	[20 ; 30 [	[30 ; 32 [	[32 ; 34 [	[34 ; 36 [	[36 ; 40 [	**Total**
Effectif	45	35	60	40	20	200
Fréquence	22,5%	17,5%	30,0%	20,0%	10,0%	100,0%
Amplitude	10	2	2	2	4	20
Densité	4,5	17,5	30	20	5	10

Pour la classe [20 ; 30 [:
- Amplitude : $\Delta_1 = 30 - 20 = 10$.
- Densité : $d_1 = \dfrac{n_1}{\Delta_1} = \dfrac{45}{10} = 4{,}5$

Rappelons que, dans un histogramme, ce n'est pas la hauteur d'un rectangle, mais sa surface, qui représente l'effectif de la classe correspondante.



Graphique 2 : histogramme des loyers

2. Le prix modal peut être estimé à l'aide de la construction figurant sur le graphique. On obtient environ 33,10 €.

3. La moyenne s'obtient grâce à la formule suivante :

$$\bar{x}=\frac{\sum n_i \cdot x_i}{N}$$

Par exemple, le centre de la première classe ([20 ; 30 [) est :

$$x_1=\frac{20+30}{2}=25\,€.$$

Regroupons les calculs dans un tableau :

Classe	***Effectif*** **(n_i)**	***Centre*** **(x_i)**	**$n_i.x_i$**	**x_i^2**	**$n_i.x_i^2$**
[20 ; 30 [	45	25	1 125	625	28 125
[30 ; 32 [	35	31	1 085	961	33 635
[32 ; 34 [	60	33	1 980	1 089	65 340
[34 ; 36 [	40	35	1 400	1 225	49 000
[36 ; 40 [	20	38	760	1 444	28 880
Totaux	**200**		**6 350**		**204 980**

Tableau 3 : détails des calculs de la moyenne et de la variance

Donc la moyenne est :

$$\bar{x}=\frac{\sum n_i \cdot x_i}{N}=\frac{6350}{200}=31{,}75\,€.$$

La formule permettant de calculer la variance est :

$$V_x=\frac{\sum n_i \cdot x_i^2}{N}-\bar{x}^2=\frac{204980}{200}-31{,}75^2=16{,}8375$$

On en déduit l'écart type :

$$\sigma_x=\sqrt{V_x}=\sqrt{16{,}8375}\approx 4{,}10\,€.$$

Le coefficient de variation est :

$$C=\frac{\sigma_x}{\bar{x}}=\frac{4{,}10}{31{,}75}\approx 0{,}13 \text{ ou } 13\ \%.$$

4. **Les points que le commentaire doit faire apparaître sont les suivants :**
   - **l'étendue de la série : de 20 à 40 € ;**
   - **le mode (prix le plus fréquent) : 33,10 € ;**
   - **l'asymétrie du graphique, qui est confirmée par le fait que la médiane (32,70 €) est supérieure à la moyenne (31,75 €) ;**
   - **la moyenne (31,75 €) et l'écart type (4,10 €) : les prix typiques sont compris entre 31,75 – 4,10 = 27,65 € et 31,75 + 4,10 = 35,85 €.**

   Voici une proposition de rédaction :

   L'échantillon paraît fortement hétérogène, puisque les prix relevés varient du simple au double (de 20 à 40 €). Il convient cependant de remarquer que cette distribution est asymétrique, avec une nette concentration dans les trois classes centrales (entre 30 et 36 €), la valeur la plus fréquente étant 33,10 €.

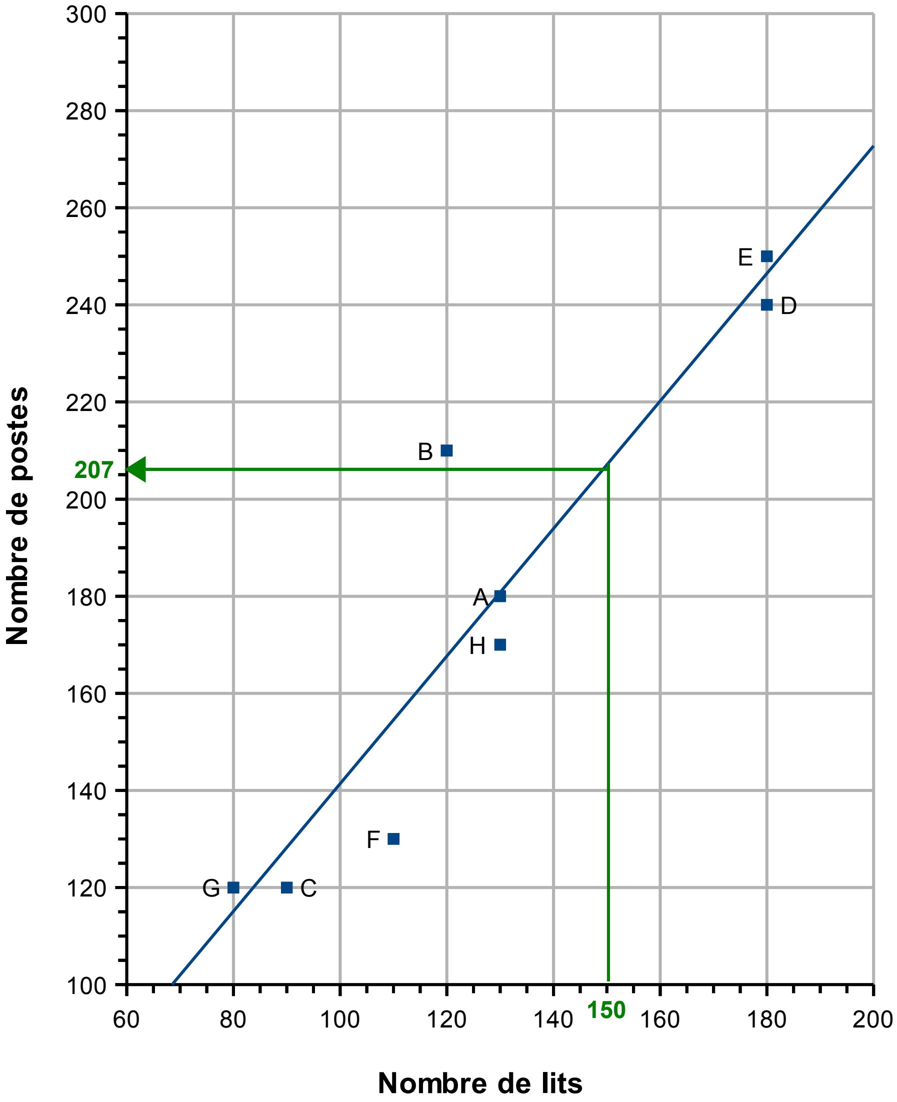
   La majorité des prix est donc relativement élevée, puisqu'un quart seulement est en dessous de 30,30 € ; un autre quart étant même au-dessus de 34,50 €.

   Le prix moyen est 31,75 €, avec un écart type de 4,10 €. La dispersion relative est donc faible (le coefficient de variation est de 13 %). Un prix typique est compris entre 27,65 € et 35,85 €.

Exercice n° 3

1. On peut imaginer que le nombre de postes dépend du nombre de lits et non l'inverse. Il est donc naturel de placer le nombre de lits en abscisses et le nombre de postes en ordonnées.

2.



Graphique 3 : nuage de points.

Clinique	A	B	C	D	E	F	G	H
Nombre de lits	130	120	90	180	180	110	80	130
Nombre de postes	180	210	120	240	250	130	120	170

3. Ce graphique fait clairement apparaître une relation de type linéaire : les points sont proches d'une droite ascendante (même si la clinique B semble avoir un nombre de postes anormalement élevé).

4. Pour déterminer l'équation de la droite de régression, nous avons besoin des éléments suivants :
   - Nombre de points : $n = 8$.
   - Moyenne de x : $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1020}{8} = 127{,}5$ (les totaux sont donnés dans l'énoncé).
   - Moyenne de y : $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{1420}{8} = 177{,}5$.

- Covariance de x et de y : $cov(x\,;y)=\frac{\sum x_i \cdot y_i}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{193600}{8}-127{,}5\times 177{,}5=1\ 568{,}75$.
- Variance de x : $V_x=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2=\frac{139600}{8}-127{,}5^2=1\ 193{,}75$.

On en déduit les paramètres de la droite de régression :

- Son coefficient directeur : $a=\frac{cov(x\,;y)}{V_x}=\frac{1568{,}75}{1193{,}75}=1{,}31$.
- Son ordonnée à l'origine : $b=\bar{y}-a\cdot\bar{x}=177{,}5-1{,}31\times 127{,}5\approx 10$.

D'où l'équation cherchée : $y=1{,}31\,x+10$

En moyenne, une clinique fait appel à 10 postes de personnel non soignant, plus 1,31 par lit.

5. Pour reporter la droite sur le graphique, il faut calculer les coordonnées de deux points :

x	80	200
y	115	272

Tableau 4

6. D'après l'équation de la droite de régression, si x est égal à 150, y doit être égal à :
$\hat{y}=1{,}31\times 150+10\approx 207$
Une clinique de 150 lits nécessite donc en moyenne 207 postes de personnel non soignant.
7. Pour calculer le coefficient de corrélation, nous avons besoin des écarts types de x et de y :
   - écart type de x : $\sigma_x=\sqrt{V_x}=\sqrt{1193{,}75}\approx 34{,}55$;
   - variance de y : $V_y=\frac{\sum y_i^2}{n}-\bar{y}^2=\frac{271200}{8}-177{,}5^2=2393{,}75$;
   - écart type de y : $\sigma_y=\sqrt{V_y}=\sqrt{2393{,}75}\approx 48{,}93$.

   $r=\frac{cov(x\,;y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{1568{,}75}{34{,}55\times 48{,}93}\approx 0{,}928$
8. La valeur de r est proche de +1 : il s'agit donc bien d'une bonne corrélation positive, comme nous l'avions prévu à la question 3.