Énoncé

UNIVERSITÉ DE LILLE III – UFR des LEA
ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010 – 2011
LICENCE 1 – SEMESTRE 2 – SESSION 2
NOM DE LA DISCIPLINE : **Mathématiques**
DUREE : 1 h
TYPE D'EXERCICE : Exercices et/ou questions
DOCUMENTS AUTORISÉS : Calculatrice non programmable
À JOINDRE AU SUJET : 1 feuille de papier millimétré.

Les trois exercices sont indépendants. Il n'est pas obligatoire de les traiter dans l'ordre de l'énoncé. Rédigez soigneusement mais de façon concise. Tout résultat doit être justifié, notamment en indiquant la formule utilisée.
Deux graphiques sont à réaliser. Vous respecterez donc l'échelle proposée de façon à ce qu'ils tiennent sur la feuille de papier millimétré. N'oubliez pas de reporter votre numéro de carte d'étudiant au dos de celle-ci.

Exercice n° 1

Une entreprise produit un article dans les conditions suivantes :

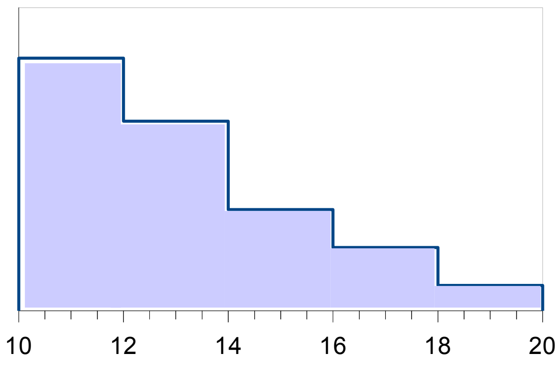
- Le coût total de production de q unités est : $\boldsymbol{C_t(q) = q^2 + 20q + 1600}$
- Le prix de vente unitaire est : $\boldsymbol{p_u = 120}$ **€**.
- On suppose que les variations de stocks sont nulles.

1. Exprimez le coût marginal et le coût moyen unitaire en fonction de la quantité produite q.
2. Étudiez la fonction de coût total puis représentez-la graphiquement.
   Échelle : 1 cm pour 10 unités en abscisses ; 1 cm pour 1 000 € en ordonnées. On se limitera aux valeurs de q comprises entre 0 et 100 unités.
3. Exprimez la recette totale en fonction de la quantité et représentez-la sur le graphique précédent.
4. D'après le graphique, pour quelles valeurs de la quantité la production est-elle rentable ?
5. Exprimez le bénéfice total en fonction de la quantité produite.

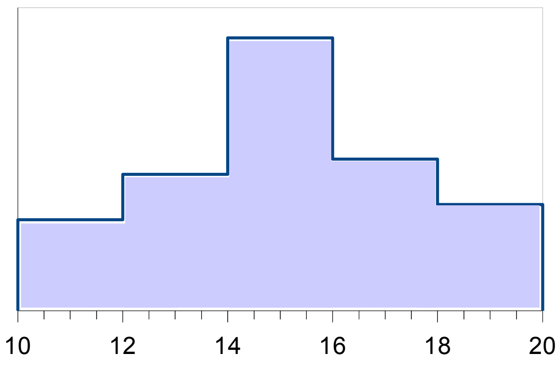
Exercice n° 2

Le prix d'un article a été relevé dans cinquante magasins. On a obtenu une moyenne égale à 15,12 €, une médiane égale à 15,11 € et une variance de 5,67.

1. Des quatre histogrammes ci-dessous, lequel vous semble donner une représentation correcte de cette série (***justifiez votre réponse***) ?

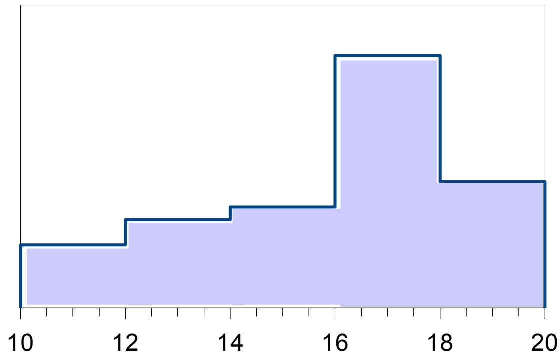


Graphique n° 1

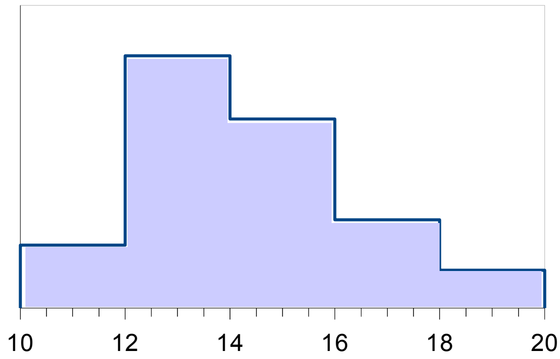


Graphique n° 2

T.S.V.P.



Graphique n° 3



Graphique n° 4

2. Quelle est la classe modale ?
3. Calculez l'écart type et le coefficient de variation.
4. En vous aidant du graphique que vous avez choisi, des indicateurs figurant dans l'énoncé et de ceux que vous avez calculés, commentez cette distribution.

Exercice n° 3

Le tableau suivant retrace l'évolution de la production d'électricité d'origine éolienne en Espagne (en milliards de kilowattheures – TWh) :

Année	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année (x)	0	1	2	3	4	5
Production (y)	14,9	20,1	22,1	26,2	30,6	34,8

1. Représentez ces données sous la forme d'un nuage de points.
   Échelle : 2 cm pour un an, 1 cm pour 5 TWh.
2. On donne les résultats suivants :

	Rang de l'année (x)	**Production (y)**
Total	15	148,7
Somme des carrés	55	3 948,27
Somme des produits	439,3	

   Déterminez une équation de la droite de régression linéaire de la production en fonction du rang de l'année.

3. Interprétez cette équation.
4. Placez la droite sur le graphique.
5. On vous propose les quatre valeurs suivantes pour le coefficient de corrélation linéaire entre le rang de l'année et la production :
   $r_1 = +0{,}596$ $r_2 = -0{,}996$ $r_3 = +0{,}996$ $r_4 = +0{,}196$
   Sans calculs, indiquez celle qui vous semble la plus vraisemblable. Pourquoi ?

Corrigé

Exercice n° 1

1. Le coût marginal est la dérivée du coût total :
   $C_m(q) = C_t{}'(q) = 2q + 20 \times 1 + 0 = 2q + 20$
   Le coût moyen unitaire est égal au rapport du coût total à la quantité q :
   $C_u(q) = \dfrac{C_t(q)}{q} = \dfrac{q^2 + 20q + 1600}{q} = \dfrac{q^2}{q} + \dfrac{20q}{q} + \dfrac{1600}{q} = q + 20 + \dfrac{1600}{q}$

2. Étude de la fonction C_t :
   - Ensemble de définition : [0 ; +∞ [
   - Dérivée : $C_t{}'(q) = C_m(q) = 2q + 20$
   - Signe de la dérivée :
     Comme $q \geqslant 0$, $2q + 20 \geqslant 20 > 0$ donc $C_t'(q) > 0$.
     La fonction de coût total est donc strictement croissante sur [0 ; +∞ [.
   - Tableau de variations :

q	0	+∞
$C_t'(q)$	+	
$C_t(q)$	1600 $\nearrow$	+∞

   $C_t(0) = 0^2 + 20 \times 0 + 1600 = 1600$

3. Pour tracer la courbe, il faut calculer les coordonnées de quelques points :

q	0	20	40	60	80	100
$C_t(q)$	1 600	2 400	4 000	6 400	9 600	13 600

   Tableau 1 : tableau de valeurs de la fonction de coût total

   Voir le graphique 1 page suivante.

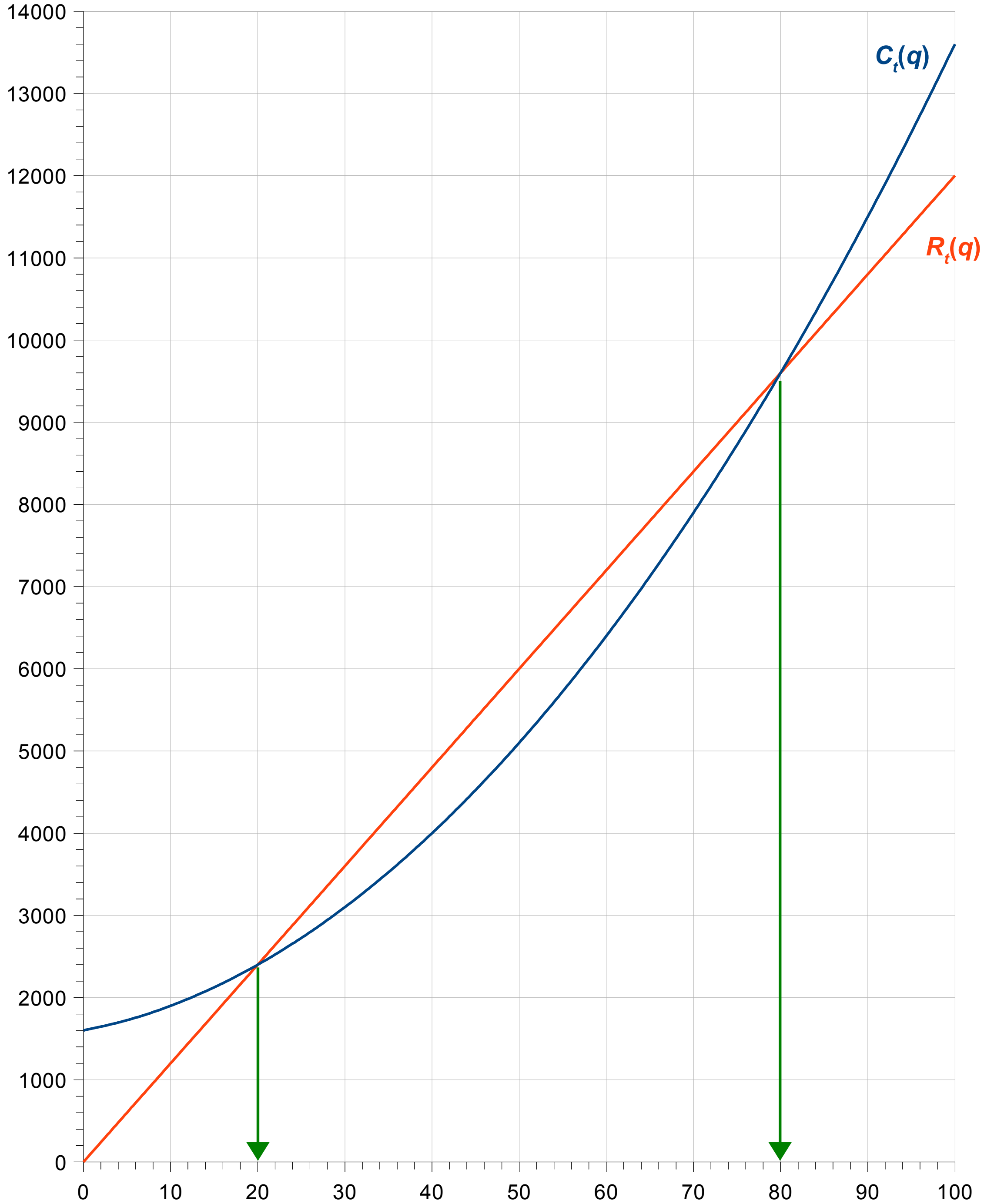
4. La recette totale s'obtient en multipliant le prix de vente unitaire (p_u = 120 €) par le nombre d'unités vendues. Si on fait l'hypothèse que les variations de stocks sont nulles, ce dernier est égal à la quantité produite q :
   $R_t(q) = p_u \cdot q = 120q$
   Il s'agit d'une fonction affine. Sa représentation graphique est donc une droite et il suffit de deux points pour la tracer :

q	0	100
$R_t(q)$	0	12 000

   Tableau 2 : valeurs de la fonction de recette totale

5. La production est rentable si la recette totale est supérieure au coût total, donc si la droite de R_t est au-dessus de la courbe de C_t. D'après le graphique, c'est le cas entre les abscisses des deux points d'intersection, soit pour q compris entre 20 et 80 unités.

6. Le bénéfice total est égal à la différence entre la recette totale et le coût total :
   $B(q) = R_t(q) - C_t(q) = 120q - (q^2 + 20q + 1600) = 120q - q^2 - 20q - 1600 = -q^2 + 100q - 1600$

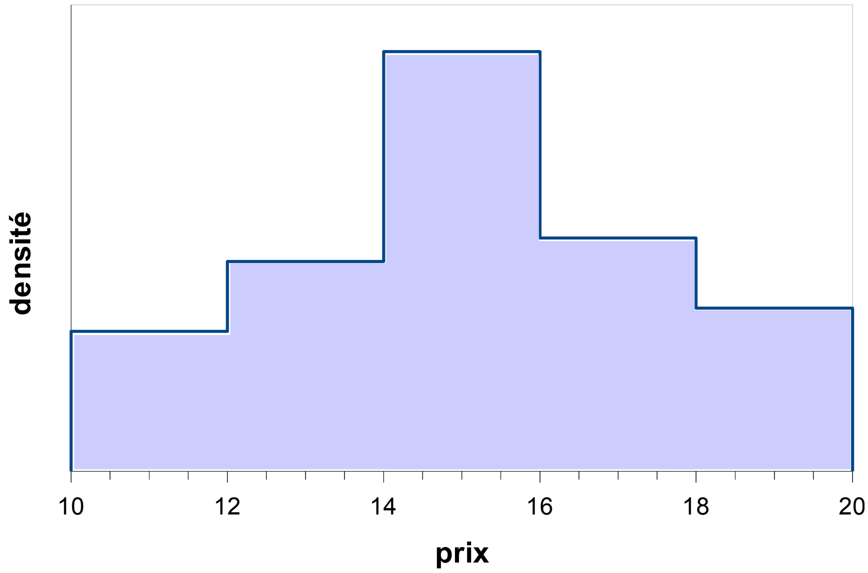


Graphique n° 1 : les fonctions de coût total et de recette totale

Exercice n° 2

1. Les graphiques n° 1 et 4 montrent un histogramme asymétrique, avec un pic clairement décalé vers la gauche. Pour ces deux séries, la moyenne est donc nettement supérieure à la médiane (car influencée par les quelques valeurs nettement supérieures aux autres).
   À l'inverse, le graphique n° 3 est asymétrique avec un pic décalé vers la droite. Pour cette série, la moyenne est donc inférieure à la médiane.

En revanche, le graphique n° 2 est presque parfaitement symétrique , ce qui se traduit par des valeurs très proches pour la moyenne et la médiane. C'est donc le seul graphique compatible avec les informations disponibles (moyenne égale à 15,12 €, médiane égale à 15,11 €) :



Graphique n° 2 : l'histogramme correct

2. La classe modale est la classe de plus forte densité, donc celle qui correspond au rectangle le plus haut sur l'histogramme. C'est donc la classe [14 ; 16 [.
3. L'écart type est la racine carrée de la variance :
   $\sigma_x = \sqrt{V_x} = \sqrt{5{,}67} \approx 2{,}38$ €.
   Le coefficient de variation est égal au rapport de l'écart type à la moyenne :
   $C = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{2{,}38}{15{,}12} \approx 0{,}157$ ou 15,7 %.
4. Commentaire :
   Le commentaire doit faire apparaître les éléments suivants :
   - **l'étendue de la série (de 10 à 20 €) ;**
   - **la classe modale (intervalle de prix le plus fréquent) : de 14 à moins de 16 € ;**
   - **la moyenne (15,12 €) et l'écart type (2,38 €) ;**
   - **la symétrie presque parfaite du graphique.**

   Voici une proposition de rédaction :
   Les prix relevés vont de 10 à 20 € (soit un rapport de 1 à 2). Il convient cependant de remarquer que pour l'essentiel il sont compris entre 14 et 16 €.
   La dispersion de la série est donc modérée, avec des prix typiques compris entre 12,74 € (15,12 – 2,38) et 17,50 € (15,12 + 2,38).
   À l'opposé, on remarque que les prix extrêmes (inférieurs à 12 € ou supérieurs à 18 €) sont fort peu représentées. Le diagramme est donc presque symétrique.

Exercice n° 3

1. Nuage de points : voir graphique 3 page suivante.
2. Pour déterminer l'équation de la droite de régression, nous avons besoin des éléments suivants :
   - Nombre de points : $n = 6$.
   - Moyenne de x : $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{15}{6} = 2{,}5$ (les totaux sont donnés dans l'énoncé).
   - Moyenne de y : $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{148{,}7}{6} \approx 24{,}78$.

- Covariance de x et de y : $cov(x\,;y)=\frac{\sum x_i \cdot y_i}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{439{,}3}{6}-2{,}5\times 24{,}78\approx 11{,}27$.
- Variance de x : $V_x=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2=\frac{55}{6}-2{,}5^2\approx 2{,}917$.

On en déduit les paramètres de la droite de régression :

- Son coefficient directeur : $a=\frac{cov(x\,;y)}{V_x}=\frac{11{,}27}{2{,}917}\approx 3{,}86$.
- Son ordonnée à l'origine : $b=\bar{y}-a\cdot\bar{x}=24{,}78-3{,}86\times 2{,}5\approx 15{,}1$.

D'où l'équation cherchée : $y=3{,}86\,x+15{,}1$

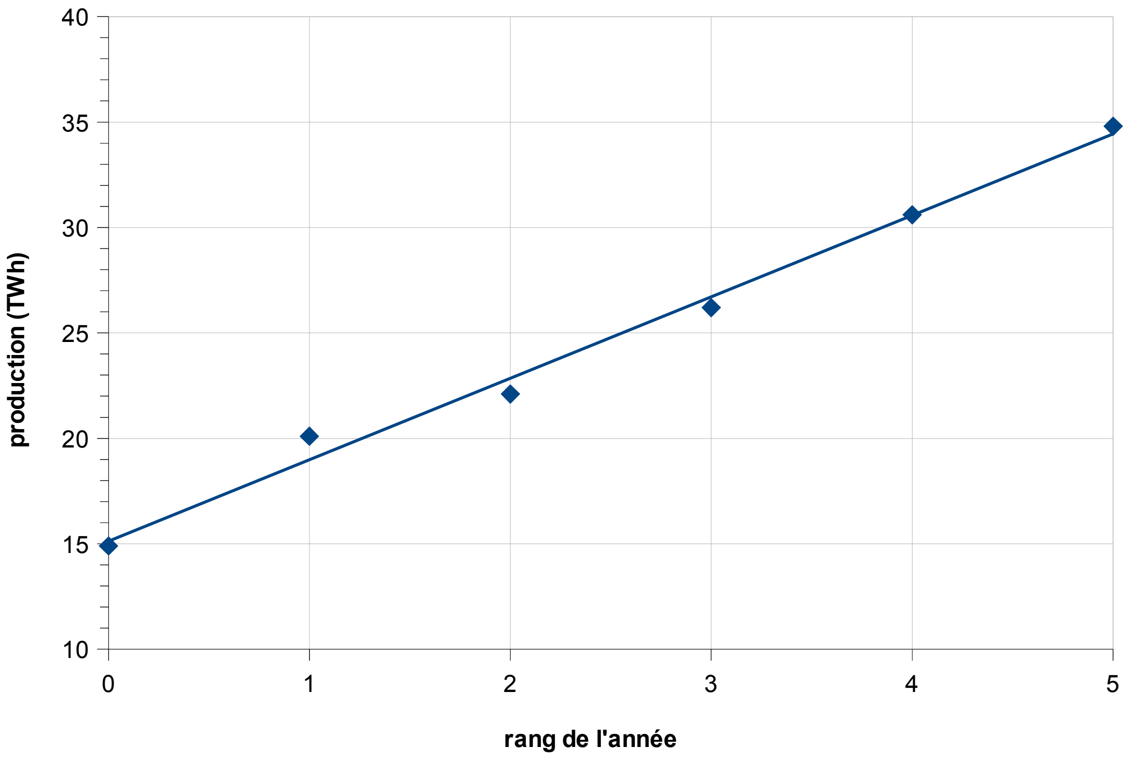
3. Pour reporter la droite sur le graphique, il faut calculer les coordonnées de deux points :

x	0	5
y	15,1	34,4

Tableau 3

4. L'équation de la droite de régression est : $y=3{,}86\,x+15{,}1$
Nous avons donc mis en évidence une tendance linéaire, avec comme valeur initiale 15,1 TWh en 2004 (l'année 0) et une croissance de 3,86 TWh par an.

5. Les points du nuage sont très proches de la droite de régression, qui est ascendante. Nous avons donc une excellente corrélation positive : la valeur de r doit donc être très proche de +1. La seule valeur acceptable parmi les quatre proposées est donc $r_3 = +0{,}996$.



Graphique n° 3 : le nuage de points