Énoncé

UNIVERSITE DE LILLE III – UFR LEA Année universitaire 2011/2012
Licence 1 - semestre 1 - session 1

Mathématiques

Nombre de pages : 2
Durée : 2 h Documents autorisés : calculatrice non programmable

Les six exercices sont indépendants. Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez. La notation prendra en compte les qualités de la rédaction (clarté, lisibilité, orthographe…).
Les indices et pourcentages seront arrondis à un chiffre après la virgule. Les sommes en euros seront arrondies au centime le plus proche et les taux d'intérêt à 0,01 %.

Exercice 1

Le tableau suivant retrace l'évolution de la production chinoise de charbon :

Année	2006	2007	2008	2009	2010
Production (Mt)	2 335	2 523	2 800	3 050	3 321

Source : US Energy Information Administration

1- Calculez le pourcentage de variation de la production entre 2006 et 2010.

2- Calculez le pourcentage moyen annuel de croissance de la production entre 2006 et 2010.

3- Calculez les indices de la production, base 100 en 2006.

4- Expliquez en quoi le résultat de la question 3 vous permet de vérifier celui de la question 1.

Exercice 2

En 2008, l'électricité d'origine éolienne représentait 10,4 % de la production électrique espagnole. Entre 2008 et 2009, la production d'électricité d'origine éolienne a augmenté de 13,7 % alors que la production totale a diminué de 6,3 %.
Quelle était la part relative de l'électricité éolienne dans la production électrique espagnole en 2009 ?

Exercice 3

Le tableau suivant présente l'élasticité de la demande de trois produits par rapport à leur prix et par rapport au revenu des consommateurs :

Produit	Élasticité-prix	Élasticité-revenu
A	–1,50	+1,50
B	–0,25	–0,50
C	–0,75	+0,55

1- Commentez les données de ce tableau.

2- On suppose que le prix du produit A augmente de 5 % (toutes choses égales par ailleurs).
  a) De combien variera sa demande ?
  b) Le chiffre d'affaire des vendeurs augmentera-t-il ou baissera-t-il ? De quel pourcentage ?

Exercice 4

1- Le 10 janvier 2012, un étudiant dépose 500 € sur un livret jeune rémunéré à 3,50 % par an.
  a) Calculez les intérêts au 31 décembre 2012.
  b) Quelle sera la valeur acquise à cette même date ?

2- Le 10 janvier 2011, un particulier a déposé 3 450 € sur un compte bancaire. La valeur acquise au 09 juillet 2011 était de 3 519 €.
Quel était le taux annuel d'intérêt ?

Exercice 5

1- Le 10 janvier 2012, un particulier dépose 10 000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an.
  a) Calculez la valeur acquise au 10 janvier 2020.
  b) Quel est le montant total des intérêts à cette date ?
  c) À partir de quelle date la valeur acquise dépassera-t-elle 15 000 € ?

2- Quel est le taux d'intérêt mensuel équivalent à un taux annuel égal à 5,50 % par an ?

Exercice 6

1- Depuis le 10 janvier 2000, un particulier dépose tous les ans à la même date une somme de 3 000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an.
Calculez la valeur acquise et les intérêts au 10 janvier 2012.

2- Le 10 janvier 2012, un particulier emprunte 60 000 € à 5 % par an. Il remboursera en quinze annuités égales, la première étant versée le 10 janvier 2013.
  a) Calculez le montant de l'annuité à verser.
  b) Construisez les trois premières lignes du tableau d'amortissement.
  c) Estimez le coût total de cet emprunt.

Corrigé

Exercice 1

1- Le pourcentage de variation de la production entre 2006 (2 335 Mt) et 2010 (3 321 Mt) est défini par :

$$p = 100 \times \frac{3321 - 2335}{2335} \approx +42{,}2\,\%.$$

Entre 2006 et 2010, la production chinoise de charbon a augmenté de 42,2 %.

2- Le pourcentage moyen annuel de croissance de la production entre 2006 et 2010 est :

$$p = 100 \times \left[\left(\frac{3321}{2335} \right)^{1/4} - 1 \right] \approx +9{,}2\,\%.$$

Entre 2006 et 2010, la production chinoise de charbon a augmenté de 9,2 % par an, en moyenne.

On remarque que ce pourcentage n'est pas égal à 42,2 ÷ 4 (= 10,55) : le pourcentage moyen annuel de croissance ne s'obtient pas en divisant le pourcentage global par le nombre d'années.

3- L'indice de la production de l'année t, base 100 en 2006, est défini par :

$I_{t,2006} = \frac{G_t}{G_{2006}} \cdot 100$ où G_t désigne la production de l'année t et G_{2006} celle de 2006.

Pour 2006 : $I_{2006,2006} = 100$ (c'est l'année de base).

Pour 2007 : $I_{2007,2006} = \frac{G_{2007}}{G_{2006}} \cdot 100 = \frac{2523}{2335} \times 100 \approx 108{,}1$

De même pour les autres années :

Année	2006	2007	2008	2009	2010
Production (Mt)	2 335	2 523	2 800	3 050	3 321
Indice base 100 en 2006	100,0	108,1	119,9	130,6	142,2

4- Comme 2006 est l'année de base, le pourcentage de variation de la production entre 2006 et 2010 peut s'obtenir simplement en enlevant 100 à l'indice de départ :

$p = I_{2010,2006} - 100 = 142{,}2 - 100 = +42{,}2\,\%.$

On retrouve bien le résultat de la question 1.

Exercice 2

Cet exercice est une reprise de l'exercice 3 du devoir n° 1.

La difficulté de cet exercice tient au fait que nous ignorons la production électrique totale et production éolienne, pour 2008 comme pour 2009.

Une solution est de prendre une valeur de départ arbitraire : supposons que la production électrique totale en 2008 soit égale à 100.

L'électricité d'origine éolienne représente 10,4 % de ce total, soit précisément 10,4.

Entre 2008 et 2009, la production totale a diminué de 6,3 %. En 2009 elle s'élève donc à :

$$100 \times \left(1 - \frac{6{,}3}{100} \right) = 93{,}7$$

Entre 2008 et 2009, la production éolienne a augmenté de 13,7 %. En 2009 elle s'élève donc à :

$$10{,}4\times\left(1+\frac{13{,}7}{100}\right)=11{,}8$$

La part relative de l'électricité d'origine éolienne dans le total est donc :

$$\frac{11{,}8}{93{,}7}\times 100=12{,}6$$

En 2009, l'électricité d'origine éolienne représentait donc 12,6 % de la production électrique totale de l'Espagne.

Remarque : La part relative de l'électricité éolienne s'obtient en divisant la quantité d'électricité d'origine éolienne par la production totale. On peut donc montrer que le coefficient multiplicateur de la part relative de l'éolien s'obtient en divisant celui de l'électricité éolienne (1,137) par celui du total (0,937) : 1,137 ÷ 0,937 ≈ 1,213

La part relative de l'éolien en 2009 est donc : 1,213 × 10,4 ≈ 12,6 %.

Exercice 3

1- Rappelons la définition des élasticités :

$$\textbf{élasticité-prix}=\frac{\textbf{pourcentage de variation de la demande}}{\textbf{pourcentage de variation du prix}}$$

$$\textbf{élasticité-revenu}=\frac{\textbf{pourcentage de variation de la demande}}{\textbf{pourcentage de variation du revenu}}$$

Les élasticités-prix sont toutes négatives (ce qui est le plus souvent le cas) : quand le prix augmente la demande baisse. Remarquons cependant que pour une même hausse du prix de 1 %, la demande du bien A baissera de plus de 1 % (il s'agit donc d'un bien **fortement élastique**) alors que la demande de B baissera de 0,25 % seulement et celle de C de 0,75% : ces deux biens sont donc **faiblement élastiques**.

L'élasticité-revenu du bien B est négative, il s'agit donc d'un **bien inférieur**. Celle de C est comprise entre 0 et 1, il s'agit donc d'un **bien normal**, tandis que A, avec une élasticité-revenu supérieure à 1 est un **bien supérieur**.

2-

a) En inversant la définition de l'élasticité-prix de la demande, on obtient :

$$\textbf{pourcentage de variation de la demande}=(\textbf{élasticité-prix})\times(\textbf{pourcentage de variation du prix})$$

Donc la demande va varier de $-1{,}5\times 5=-7{,}5\%$.

Si le prix augmente de 5 %, la demande va baisser de 7,5 %.

b) Le chiffre d'affaire des vendeurs est égal au produit du prix unitaire par le nombre d'unités vendues. Si le prix augmente de seulement 5 % tandis que les ventes baissent de 7,5 %, il va donc baisser.

Pour savoir de quel pourcentage, prenons un exemple :

Si le prix de départ est de 10 €, avec une demande 1 000 unités, le chiffre d'affaires de départ est donc 10 × 1000 = 10 000 €.

Après la hausse de 5 % le prix est égal à 10 × 1,05 = 10,50 €.

Après la baisse de 7,5 %, la demande est 1000 × 0,925 = 925 unités.

Le chiffre d'affaires est donc égal à 10,50 × 925 = 9 712,50 €.

Le pourcentage de variation du chiffre d'affaires est donc : $100\times\frac{9712{,}5-10000}{10000}\approx -2{,}9\%$.

Si le prix augmente de 5 %, le chiffre d'affaires baisse de 2,9 %.

Remarque : comme le chiffre d'affaires est le produit du prix par la demande, son coefficient multiplicateur s'obtient en multipliant celui du prix (1,05) par celui de la demande (0,925).

Le coefficient multiplicateur du chiffre d'affaires est donc 1,05 × 0,925 ≈ 0,971.
On en déduit que le pourcentage de variation du chiffre d'affaires est 100 × (0,971 – 1), ce qui donne bien –2,9 %.

Exercice 4

Les deux questions de cet exercice portent sur des placements qui durent moins d'un an. Il faut donc utiliser les **intérêts simples**.

1- Le placement étant effectué sur un livret, les intérêts sont calculés proportionnellement au nombre de **quinzaines civiles entières**.
Capital placé : $C = 500$ €.
Taux annuel d'intérêt : $i = 3{,}55$ %.
Durée du placement : $n = 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 23$ quinzaines.
(la première quinzaine de janvier est incomplète, elle ne rapporte donc pas d'intérêts)

a) Le montant des intérêts est donc égal à :
$$I = C \cdot i \cdot \frac{n}{24} = 500 \times \frac{3{,}50}{100} \times \frac{23}{24} = 16{,}77 \text{ €}.$$

b) La valeur acquise est égale à la somme du capital et des intérêts. À la date du 31 décembre 2012, elle est donc égale à :
$$V = C + I = 500 + 16{,}77 = 516{,}77 \text{ €}.$$

2- Comme il s'agit maintenant d'un compte bancaire, les intérêts sont calculés en fonction du nombre de jours.
Capital placé : $C = 3\,450$ €.
Taux annuel d'intérêt : $i = ?$
Durée du placement : $N = 21 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 9 = 180$ jours.
Valeur acquise : $V = 3\,519$ €.
La valeur acquise est : $V = C + I$
Donc le montant des intérêts est : $I = V - C = 3519 - 3450 = 69$ €.
La formule donnant les intérêts est : $I = C \cdot i \cdot \frac{N}{360}$
En l'inversant : $i = \frac{I \cdot 360}{C \cdot N} = \frac{69 \times 360}{3450 \times 180} = 0{,}04$ (ou 4 %)
Le taux annuel d'intérêt était donc 4 %.

Exercice 5

1- Cette question porte sur un placement à long terme (il dure plus d'un an). Il faut donc utiliser les **intérêts composés**.
Capital placé : $C = 10\,000$ €.
Taux annuel d'intérêt : $i = 3$ %.
Coefficient de capitalisation : $m = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$
Durée du placement : $t = 8$ ans.

a) La valeur acquise au 10 janvier 2020 est :
$$V = C \cdot m^t = 10000 \times 1{,}03^8 \approx 12\,667{,}70 \text{ €}.$$

b) Les intérêts au 10 janvier 2020 sont donc égaux à :
$$I = V - C = 12667{,}70 - 10000 = 2\,667{,}70 \text{ €}.$$

c) Au bout de 8 ans, la valeur acquise est de seulement 12 667,70 €. Pour atteindre 15 000 €, il faudra donc une durée supérieure et le calcul se fera donc toujours en *intérêt composés* :

La valeur acquise au bout de t années est : $V = C \cdot m^t = 10000 \times 1{,}03^t$
Elle atteindra donc 15 000 € quand $10000 \times 1{,}03^t = 15000$

$$1{,}03^t = \frac{15000}{10000} = 1{,}5$$

Pour résoudre cette équation, on se sert des logarithmes :

$$\ln(1{,}03^t) = \ln(1{,}5)$$
$$t \cdot \ln(1{,}03) = \ln(1{,}5)$$

D'où : $t = \dfrac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}03)} \approx 13{,}7172$

La valeur acquise dépassera donc 15 000 € au bout de 13 ans et 262 jours (0,7172×365), soit le 29 septembre 2025.

2- Le taux d'intérêt mensuel équivalent à un taux annuel égal à 5,50 % par an est défini par :

$$1 + i_m = (1+i)^{1/12}$$

Donc $i_m = (1+i)^{1/12} - 1 = \left(1 + \dfrac{5{,}5}{100}\right)^{1/12} - 1 \approx 0{,}0045$ soit 0,45%.

Ne confondez pas ce taux avec le taux mensuel proportionnel (5,50 ÷ 12), qui s'emploierait dans un contexte d'intérêts simples.

Exercice 6

1- Cette question porte sur une situation d'épargne par versement d'annuités constantes.
Montant de l'annuité : a = 3 000 €
Taux annuel d'intérêt : i = 3 %
Nombre d'annuités : n = 13 (il y a aussi un versement en janvier 2012).
La valeur acquise juste après le dernier versement est :

$$V = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 3000 \cdot \frac{1{,}03^{13} - 1}{0{,}03} \approx 46\ 853{,}37\ €.$$

La valeur acquise juste après le versement du 10 janvier 2012 est donc 46 853,37 €.
Elle se décompose en 13 × 3000 = 39 000 € de capital et 46853,37 – 39000 = 7 853,37 € d'intérêts.

2- Cette question porte sur un **remboursement d'emprunt par annuités constantes**.

a) Capital emprunté : C = 60 000 €.
Taux annuel d'intérêt : i = 5 %.
Nombre d'annuités : n = 15.
La première annuité étant versée exactement un an après l'emprunt, le montant que le client devra verser chaque année est :

$$a = C \cdot \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} = 60000 \times \frac{0{,}05}{1 - (1+0{,}05)^{-15}} \approx 5\ 780{,}54\ €$$

b) Construction des trois premières lignes du tableau d'amortissement :

- Capital restant dû : pour la première échéance, c'est le capital emprunté (C = 60 000 €)
- Intérêts pour l'année écoulée : c'est le capital restant dû multiplié par le taux d'intérêt annuel.
  Pour la première échéance : $60000 \times 0{,}05 = 3\ 000{,}00\ €$
- Annuité : a = 5 780,54 €.
- Amortissement : c'est la différence entre l'annuité et les intérêts.
  Pour la première échéance : $5780{,}54 - 3000 = 2\ 780{,}54\ €$
- Capital restant dû pour l'échéance suivante : c'est la différence entre le capital dû et l'amortissement (la somme remboursée).

Pour la deuxième échéance : $60000-2780{,}54=57\ 219{,}46\ €$

De même pour les échéances suivantes :

Échéance	**Capital restant dû**	**Intérêts pour l'année écoulée**	**Amortissement**	**Annuité**
10/01/2013	60 000,00 €	3 000,00 €	2 780,54 €	5 780,54 €
10/01/2014	57 219,46 €	2 860,97 €	2 919,57 €	5 780,54 €
10/01/2015	54 299,89 €	2 714,99 €	3 065,55 €	5 780,54 €

c) Le coût total de l'emprunt est égal à la différence entre le total des annuités (15 versements de 5 780,54 €) et le capital emprunté :

$C_T=n\cdot a-C=15\times5780{,}54-60000=26\ 708{,}10\ €$

(à quelques centimes près, puisque le dernier versement peut être légèrement différent)