Énoncé

UNIVERSITE DE LILLE III – UFR LEA — Année universitaire 2011/2012

Licence 1 - semestre 1 - session 2

Mathématiques

Nombre de pages : 1

Durée : 1 h — Documents autorisés : calculatrice non programmable

---

Les deux exercices sont indépendants. Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous souhaitez. La notation prendra en compte les qualités de la rédaction (clarté, lisibilité, orthographe…).
Les indices et pourcentages seront arrondis à un chiffre après la virgule. Les sommes en euros seront arrondies au centime le plus proche et les taux d'intérêt à 0,01 %.

Exercice n° 1

Le tableau suivant retrace l'évolution de la production automobile du Brésil (en milliers – source : *OICA*) :

Année	2006	2007	2008	2009	2010
Production (milliers)	2 611	2 971	3 220	3 183	3 648

1) Quel est le pourcentage global de variation entre 2006 et 2010 ?
2) Calculez les indices de la production, base 100 en 2006.
3) En quoi le résultat de la question 2 permet-il de vérifier rapidement celui de la question 1 ?
4) Quel est le pourcentage moyen annuel de croissance de la production entre 2006 et 2010 ?
5) Si ce pourcentage se maintenait, au bout de combien d'années la production doublerait-elle ?
6) Entre 2000 et 2006, la production a augmenté de 54,4 %. Combien d'automobiles le brésil a-t-il produites en 2000 ?

Exercice n° 2

1) Le 20 avril 2012, un étudiant a déposé 1 000 € sur un livret jeune rémunéré à 3,50 % par an.
   a. Calculez les intérêts au 31 décembre 2012.
   b. Quelle est la valeur acquise à cette même date ?
2) Le 08 juin 2007, un particulier a déposé une somme de 10 000 € sur un compte rémunéré à 2,50 % par an.
   a. Calculez la valeur acquise au 08 juin 2012.
   b. Quel est le montant des intérêts ?
3) Depuis le 08 juin 2005, un particulier dépose chaque année à la même date une somme de 3 000 € sur un compte rémunéré à 3,00 % par an.
   a. Quelle est la valeur acquise juste après le versement du 08 juin 2012 ?
   b. À combien s'élèvent le capital épargné et le total des intérêts ?
4) Le 08 juin 2012, un particulier emprunte 40 000 € à 4,50 % par an. Il remboursera en huit annuités égales, la première étant versée le 08 juin 2013.
   a. Quel est le montant de l'annuité à verser ?
   b. Estimez le coût total de cet emprunt.

Corrigé

Exercice n° 1

Dans cet exercice, G_t désignera la production automobile du Brésil pour l'année t.

1) Le pourcentage global de variation entre 2006 et 2010 est :

$$p=100\cdot\frac{G_{2010}-G_{2006}}{G_{2006}}=100\times\frac{3648-2611}{2611}\approx+39,7\%$$

Entre 2006 et 2010, la production automobile brésilienne a globalement augmenté de 39,7 %.

2) La formule permettant de calculer l'indice de la production de l'année t, base 100 en 2006, est :

$$I_{t,2006}=100\cdot\frac{G_t}{G_{2006}}$$

Pour 2006 : $I_{2006,2006}=100$ (année de base).

Pour 2007 : $I_{2007,2006}=100\times\frac{G_{2007}}{G_{2006}}=100\times\frac{2971}{2611}\approx113,8$

De même pour les autres années :

Année	2006	2007	2008	2009	2010
Production	2 611	2 971	3 220	3 183	3 648
Indice base 100 en 2006	100	113,8	123,3	121,9	139,7

3) Comme 2006 est l'année de base, le pourcentage global de variation entre 2006 et 2010 peut s'obtenir de façon simplifiée à partir des indices :

$$p=I_{2010,2006}-100=139,7-100=39,7\ \%$$

Nous retrouvons bien le résultat de la question 1.

4) Le pourcentage moyen annuel de croissance de la production entre 2006 et 2010 (sur n = 4 ans) est :

$$p=100\cdot\left[\left(\frac{G_{2010}}{G_{2006}}\right)^{1/n}-1\right]=100\times\left[\left(\frac{3648}{2611}\right)^{1/4}-1\right]\approx+8,7\%$$

Entre 2006 et 2010, la production automobile brésilienne a donc augmenté de 8,7 % par an en moyenne.

On remarque que ce pourcentage ne s'obtient pas en divisant le pourcentage global de variation (39,7 %) par le nombre d'années (4) : 39,7 / 4 ≈ 9,9 %.

5) Si ce pourcentage se maintenait, nous serions dans une situation de croissance constante, avec comme valeur initiale G_{2006} = 2611 et un coefficient multiplicateur annuel égal à :

$$m=1+\frac{8,7}{100}=1,087$$

La production au bout de n années serait donc :

$$G_{2006+n}=G_{2006}\cdot m^n=G_{2006}\cdot1,087^n$$

Nous souhaitons que la production double, donc que :

$$G_{2006+n}=2\cdot G_{2006}$$

Soit encore : $G_{2006}\cdot1,087^n=2\cdot G_{2006}$

En simplifiant par la valeur initiale : $1,087^n=2$

On prend les logarithmes des deux membres :

$$\ln\left(1,087^n\right)=\ln(2)$$

$n\cdot\ln(1,087)=\ln(2)$ car $\ln(a^n)=n\cdot\ln(a)$ d'où :

$$n=\frac{\ln(2)}{\ln(1,087)}\approx8,31$$

Si la croissance observée sur la période 2006-2010 se poursuivait, la production automobile brésilienne doublerait tous les 9 ans.

En fait, le choix de l'année de départ n'influe pas sur ce résultat : nous aurions aussi bien pu partir de de 2010.

6) Entre 2000 et 2006, la production a augmenté de 54,4 %, ce qui correspond à une multiplication par :

$$m=1+\frac{p}{100}=1+\frac{54,4}{100}=1,544$$

Inversement, pour retrouver la production de 2000, il faut diviser la production de 2006 (2 611 milliers) par 1,544. La production automobile brésilienne en 2000 était donc :

$$\frac{2611}{1,544}\approx 1\ 691$$

En 2000, le brésil a donc produit 1,691 millions d'automobiles.

Il n'est pas possible de répondre à cette question en enlevant 54,4 % de la production de 2006 car un pourcentage de variation se calcule toujours par rapport à la valeur de départ.

Exercice n° 2

Dans les exercices de mathématiques financières, le plus important est d'analyser correctement la situation : s'agit-il d'une opération à court terme (moins d'un an) ou à long terme (plus d'un an) ? Quel est le type de compte ? Y a-t-il un seul ou plusieurs versements ? Quelles sont les données et quelles sont les inconnues ?

1) Il s'agit d'un placement qui dure moins d'un an, donc à intérêts simples. Comme il est effectué sur un livret jeune, les intérêts sont calculés proportionnellement au nombre de quinzaines civiles entières :
Capital placé : C = 1 000 €.
Taux annuel d'intérêt : i = 3,50 %.
Durée du placement : n = 0 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16 quinzaines.
(la deuxième quinzaine d'avril est incomplète, elle ne rapporte donc pas d'intérêts)

a. Les intérêts au 31 décembre 2012 sont donc :

$$I=C\cdot i\cdot\frac{n}{24}=1000\times\frac{3,50}{100}\times\frac{16}{24}\approx 23,33\ €.$$

b. La valeur acquise au 31 décembre 2012 est la somme du capital et des intérêts :
$V=C+I=1000+23,33=1\ 023,33$ €.

2) Il s'agit maintenant d'un placement qui dure plus d'un an, donc à intérêts composés :
Capital placé : C = 10 000 €.
Taux annuel d'intérêt : i = 2,50 %.
Coefficient de capitalisation : $m=1+\frac{2,50}{100}=1,025$
Durée du placement : t = 5 ans.

a. La valeur acquise au 08 juin 2012 est :
$V=C\cdot m^t=10000\times 1,025^5\approx 11\ 314,08$ €.

b. La valeur acquise est $V = C + I$, donc les intérêts sont :
$I=V-C=11314,08-10000=1\ 314,08$ €.

3) Il ne s'agit plus d'un versement unique, mais d'épargne par versement d'annuités constantes (l'énoncé précise « un particulier dépose **chaque année à la même date** une somme de… »).
Montant de l'annuité : a = 3 000 €
Taux annuel d'intérêt : i = 3,00 %
Nombre d'annuités : n = 7 + 1 = 8
(il y a un versement en 2005 **et** un en 2012)

a. La valeur acquise juste après le versement du 08 juin 2012 est :

$$V=a\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=3000\cdot\frac{(1+0,03)^8-1}{0,03}\approx 26\ 677,01\ €$$

b. Le capital épargné total est égal à 8×3000 = 24 000 €.
Les intérêts sont égaux à 26677,01 – 24000 = 2 677,01 €.

4) Il s’agit maintenant de remboursement d’emprunt par annuités égales.
Capital emprunté : C = 40 000 €
Taux annuel d’intérêt : i = 4,50 %
Nombre d’annuités : n = 8
La première annuité est versée le 08 juin 2013, donc un an exactement après l’emprunt.

a. Le montant de l’annuité à verser est donc :
$$a = C\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 40000\times\frac{0{,}0450}{1-1{,}0450^{-8}} \approx 6\ 064{,}39\,€$$

b. Le coût total de l’emprunt est égal à la différence entre le total des annuités et le capital emprunté. Il est donc à peu près égal à :
$$C_T = n\cdot a - C = 8\times 6064{,}39 - 40000 = 8\ 515{,}12\,€$$
(comme la dernière annuité n'est pas nécessairement parfaitement égale aux précédentes, cette estimation peut différer de quelques centimes de la valeur réelle)