Énoncé

UNIVERSITE DE LILLE III – UFR LEA Année universitaire 2011/2012

Licence 1 - semestre 2 – session 1

Mathématiques

Nombre de pages : 2

Durée : 2 h Documents autorisés : aucun

À distribuer avec le sujet : 2 feuilles de papier millimétré

N'oubliez pas de reporter votre numéro de carte au dos des feuilles de papier millimétré. Il y a trois graphiques à réaliser. Veuillez donc respecter les indications de l'énoncé afin de pouvoir en placer deux sur la même feuille.
Les trois exercices sont indépendants. Il n'est pas obligatoire de les traiter dans l'ordre de l'énoncé.
Rédigez soigneusement mais de façon concise. Tout résultat doit être justifié, notamment en indiquant la formule utilisée.

Exercice n° 1

On sait que l'offre et la demande d'un bien sont les fonctions suivantes du prix unitaire p :

- Offre : $\boldsymbol{O(p)=0{,}75\,p^2+20\,p}$
- Demande : $\boldsymbol{D(p)=-0{,}75\,p^2-5\,p+400}$

(pour des valeurs de p comprises entre 0 et 20 €)

1. Calculez l'élasticité de l'offre par rapport au prix unitaire.
2. Étudiez la fonction O et représentez-la graphiquement.
   (unités : 1 cm pour 2 € en abscisses et 1 cm pour 50 unités en ordonnées)
3. Étudiez la fonction D et ajoutez sa représentation sur le graphique précédent.
4. Le prix d'équilibre du marché est le prix p pour lequel l'offre et la demande sont égales. Montrez que p vérifie l'équation suivante :
   $\boldsymbol{1{,}5\,p^2+25\,p-400=0}$
5. Résolvez cette équation. Quel est le prix d'équilibre ? Quelle est la quantité échangée à l'équilibre ?
6. Vérifiez ces deux résultats sur le graphique (**rédigez votre réponse**).

Exercice n° 2

Un restaurateur a relevé le montant payé par chaque client d'un échantillon :

Montant (€)	[16 ; 20 [	[20 ; 22 [	[22 ; 24 [	[24 ; 26 [	[26 ; 30 [
Nombre de clients	8	20	14	6	2

1. Représentez graphiquement cette série sous la forme d'un histogramme.
   Échelle : en abscisses, 1 cm pour 1 € ; en ordonnées, au choix.
2. À partir du graphique, indiquez quel est le montant modal.
3. Calculez les effectifs cumulés croissants.
4. Déduisez-en (par le calcul) une estimation de la médiane.
5. Calculez la moyenne, l'écart type et le coefficient de variation (**détaillez les calculs**).
6. En vous aidant de l'histogramme, des indicateurs que vous avez déterminés et des quartiles (on donne : $Q_1 \approx 20{,}45$ € et $Q_3 \approx 23{,}35$ €), commentez cette distribution.

Exercice n° 3

Un agent immobilier a relevé les surfaces et les loyers de huit appartements proposés à la location :

Appartement	1	2	3	4	5	6	7	8
Surface (m²)	35	55	30	45	55	40	35	25
Loyer (€)	420	520	240	390	420	420	350	280

1. Représentez cette série sous la forme d'un nuage de points.
   (échelle : 1 cm pour 2 m² en abscisses ; 1 cm pour 50 € en ordonnées)
2. On donne les indications suivantes :

	Surface(x)	**Loyer (y)**
Total	$\sum x_i = 320$	$\sum y_i = 3\ 040$
Somme des carrés	$\sum x_i^2 = 13\ 650$	$\sum y_i^2 = 1\ 210\ 200$
Somme des produits	$\sum x_i \cdot y_i = 127\ 200$	

   Déterminez une équation de la droite de régression du loyer en fonction de la surface (**détaillez les calculs**).
3. Représentez cette droite sur le graphique.
4. En fonction des informations disponibles, quelle est la meilleure estimation que l'on puisse donner du loyer moyen d'un appartement de 50 m² ?
5. Calculez le coefficient de corrélation. Que permet-il de conclure ?

Corrigé

Exercice n° 1

1. L'élasticité de l'offre par rapport au prix unitaire est définie par :
   $e(O,p)=O'(p)\cdot\frac{p}{O(p)}$
   La dérivée de l'offre est : $O'(p)=0{,}75\times 2p+20\times 1=1{,}5p+20$
   $e(O,p)=(1{,}5p+20)\cdot\frac{p}{0{,}75p^2+20p}=\frac{1{,}5p^2+20p}{0{,}75p^2+20p}$
   Remarque : on peut simplifier cette expression en factorisant numérateur et dénominateur par p :
   $e(O,p)=\frac{p(1{,}5p+20)}{p(0{,}75p+20)}=\frac{1{,}5p+20}{0{,}75p+20}$

2. Étude de la fonction O :
   - Ensemble de définition : [0 ; 20]
   - Dérivée : $O'(p)=1{,}5p+20$ (voir question 1)
   - Signe de la dérivée :
     Comme $p \geqslant 0$, $1{,}5\,p \geqslant 0$ et $1{,}5\,p + 20 \geqslant 20 > 0$ donc $O'(p) > 0$.
     La fonction d'offre est donc strictement croissante sur [0 ; 20].
   - Tableau de variations :

p	0	20
***O'*(*p*)**	+	
***O*(*p*)**	0	+∞

   $O(0)=0{,}75\times 0^2+20\times 0=0$
   $O(20)=0{,}75\times 20^2+20\times 20=700$

   - Pour tracer la courbe, il faut calculer les coordonnées de quelques points :

p	0	5	10	15	20
***O*(*p*)**	0	119	275	469	700

Tableau 1 : tableau de valeurs de la fonction d'offre

   Voir le graphique 1 page suivante.

3. Étude de la fonction D :
   - Ensemble de définition : [0 ; 20]
   - Dérivée : $D'(p)=-0{,}75\times 2p-5\times 1+0=-1{,}5p-5$
   - Signe de la dérivée :
     Comme $p \geqslant 0$, $-1{,}5\,p \leqslant 0$ et $-1{,}5\,p - 5 \leqslant -5 < 0$ donc $D'(p) < 0$.
     La fonction de demande est donc strictement décroissante sur [0 ; 20].
   - Tableau de variations :

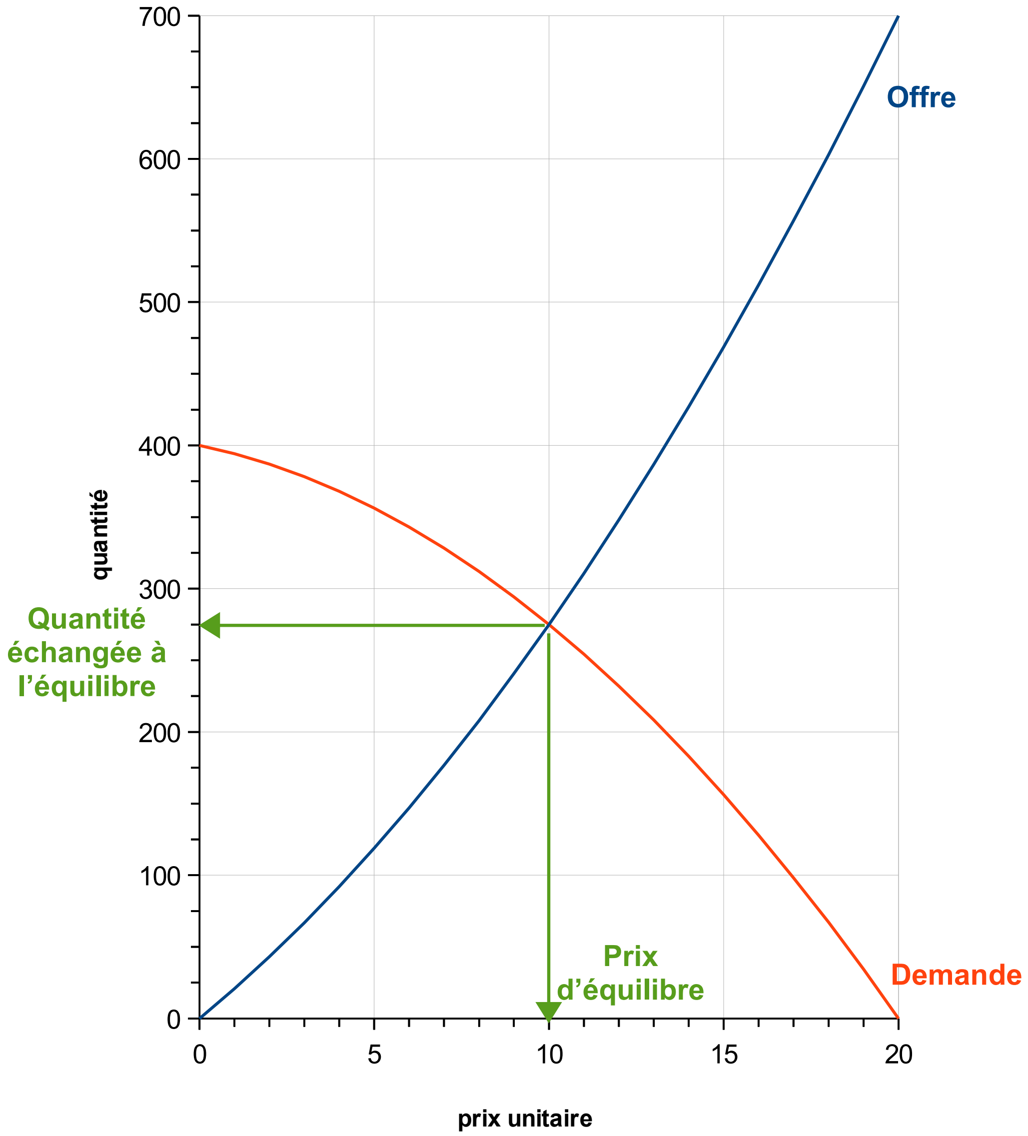
p	0	20
***D'*(*p*)**	–	
***D*(*p*)**	400	0

$D(0) = -0{,}75 \times 0^2 - 5 \times 0 + 400 = 400$
$D(20) = -0{,}75 \times 20^2 - 5 \times 20 + 400 = 0$

- Pour tracer la courbe, il faut calculer les coordonnées de quelques points :

p	0	5	10	15	20
***D*(*p*)**	400	356	275	156	0

Tableau 2 : tableau de valeurs de la fonction de demande



Graphique 1 : les fonctions d'offre et de demande.

4. Le prix d'équilibre du marché est le prix p pour lequel l'offre et la demande sont égales. Il vérifie l'équation : $O(p) = D(p)$
$0{,}75\,p^2 + 20\,p = -0{,}75\,p^2 - 5\,p + 400$
$0{,}75\,p^2 + 20\,p + 0{,}75\,p^2 + 5\,p - 400 = 0$
Donc p est solution de l'équation : $1{,}5\,p^2 + 25\,p - 400 = 0$

5. Résolution de $1{,}5\,p^2+25\,p-400=0$
   Il s'agit d'une équation du deuxième degré, de coefficients a = 1,5, b = 25 et c = –400. On calcule son discriminant :
   $\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(25)^2-4\times(1{,}5)\times(-400)=625+2400=3\ 025$
   Il est positif ; il y a donc deux racines :
   $p_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-25-\sqrt{3025}}{2\times 1{,}5}\approx -26{,}67$ et $p_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-25+\sqrt{3025}}{2\times 1{,}5}=10$
   Seule la seconde solution appartient à l'ensemble de définition ([0 ; 20]). Le prix d'équilibre est donc 10 €.
   La quantité échangée est alors la valeur commune de l'offre et de la demande :
   $O(10)=0{,}75\times 10^2+20\times 10=275$
   La quantité échangée à l'équilibre est donc 275 unités.

6. On constate sur le graphique que les deux courbes se coupent au point de coordonnées (10 ; 275). Son abscisse (10 €) est le prix d'équilibre et son ordonnée (275 unités) la quantité échangée.

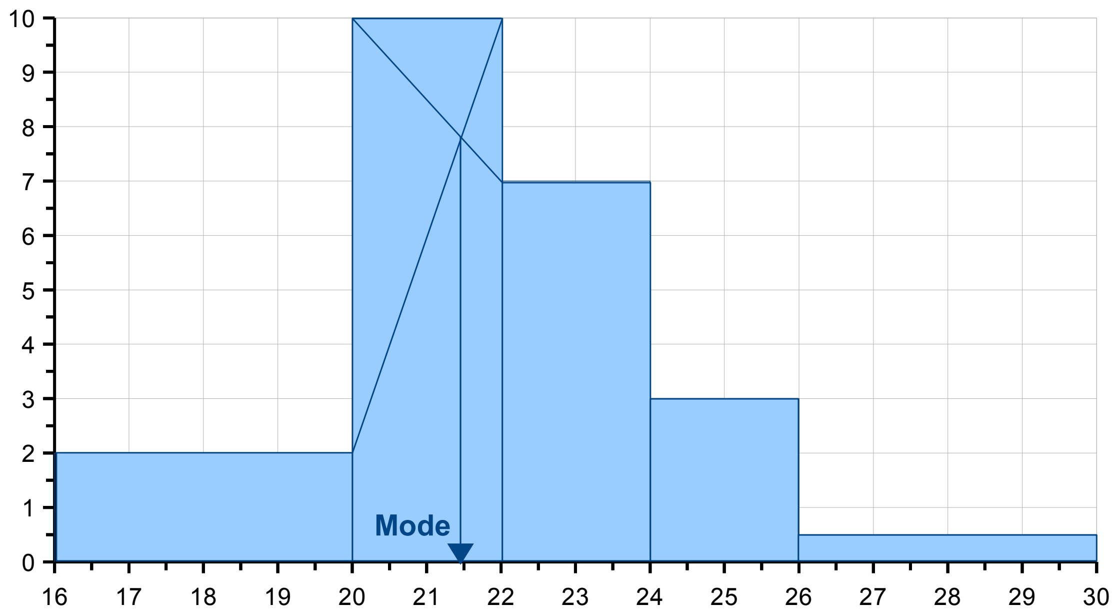
Exercice n° 2

1. Comme toutes les classes n'ont pas la même amplitude, pour représenter cette série sous la forme d'un histogramme, il faut calculer les densités des classes :

Classe	[16 ; 20 [	[20 ; 22 [	[22 ; 24 [	[24 ; 26 [	[26 ; 30 [	**Total**
Effectif	8	20	14	6	2	**50**
Amplitude	4	2	2	2	4	**14**
Densité	2,0	10,0	7,0	3,0	0,5	**3,6**

Pour la classe [16 ; 20 [: l'amplitude est $\Delta_1=20-16=4$ et la densité : $d_1=\frac{n_1}{\Delta_1}=\frac{8}{4}=2$.

Rappelons que, dans un histogramme, ce n'est pas la hauteur d'un rectangle, mais sa surface, qui représente l'effectif de la classe correspondante.



Graphique 2 : histogramme des montants.

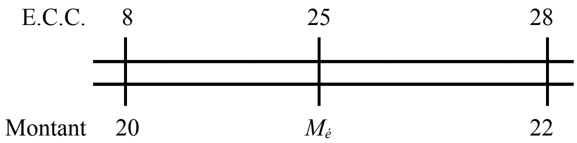
2. La classe modale est la classe de plus forte densité, donc celle qui correspond au rectangle le plus haut sur le graphique. Pour estimer graphiquement le montant modal, on se sert de la construction indiquée sur le graphique 2. Le montant modal est donc d'environ 21,50 €.

3. Les effectifs cumulés croissants s'obtiennent en partant de 0 et en additionnant progressivement les effectifs :

Montant	16	20	22	24	26	30
Effectif cumulé	0	8	28	42	48	50

Tableau 3 : les effectifs cumulés croissants

4. La médiane est le montant correspondant à un effectif cumulé égal à 50/2 = 25. D'après le tableau 3, l'effectif cumulé 25 est compris entre 8 (20 €) et 28 (22 €). La classe médiane est donc la classe [20 ; 22 [.
D'où le schéma :



et le tableau de proportionnalité :

Montant	*Effectif cumulé*
$M_é - 20$	25 – 8 = 17
22 – 20 = 2	28 – 8 = 20

On a donc :

$$(M_é - 20)\cdot 20 = 2\times 17$$

$$M_é - 20 = \frac{2\times 17}{20}$$

La médiane est donc : $M_é = 20 + \frac{2\times 17}{20} = 21{,}70$ €

5. La moyenne s'obtient grâce à la formule suivante :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{N}$$

Par exemple, le centre de la première classe ([20 ; 30 [) est :

$$x_1 = \frac{16+20}{2} = 18\,€.$$

Regroupons les calculs dans un tableau :

Classe	*Effectif (n_i)*	*Centre (x_i)*	$n_i x_i$	x_i^2	$n_i x_i^2$
[16 ; 20 [	8	18	144	324	2 592
[20 ; 22 [	20	21	420	441	8 820
[22 ; 24 [	14	23	322	529	7 406
[24 ; 26 [	6	25	150	625	3 750
[26 ; 30 [	2	28	56	784	1 568
Totaux	**50**		**1 092**		**24 136**

Tableau 4 : détails des calculs de la moyenne et de la variance

Donc la moyenne est :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{N} = \frac{1092}{50} = 21{,}84\,€.$$

Pour obtenir l'écart type, il faut d'abord calculer la variance :

$$V_x = \frac{\sum n_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{24136}{50} - 21{,}84^2 = 5{,}7344$$

On en déduit l'écart type :

$\sigma_x = \sqrt{V_x} = \sqrt{5{,}7344} \approx 2{,}39$ €.

Le coefficient de variation est :

$C = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{2{,}39}{21{,}84} \approx 0{,}11$ ou 11 %.

6. **Les points que le commentaire doit faire apparaître sont les suivants :**
   - **l'étendue de la série : de 16 à 30 € ;**
   - **le mode (montant le plus fréquent) : 21,50 € ;**
   - **l'asymétrie du graphique, qui est confirmée par le fait que la médiane (21,70 €) est inférieure à la moyenne (21,84 €) ;**
   - **la moyenne (21,84 €) et l'écart type (2,39 €) : les montants typiques sont compris entre 21,84 – 2,39 = 19,45 € et 21,84 + 2,39 = 24,23 €.**

   Voici une proposition de rédaction :

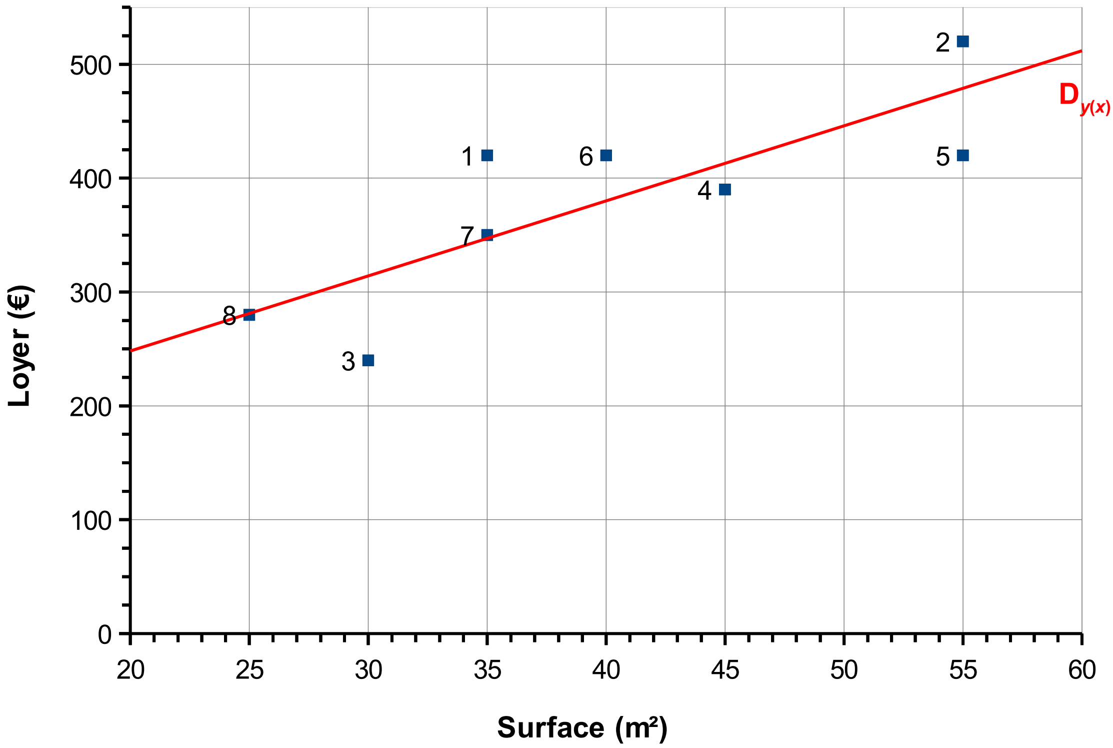
   L'échantillon paraît fortement hétérogène, puisque les montants relevés varient presque du simple au double (de 16 à 30 €). Il convient cependant de remarquer que cette distribution est asymétrique, avec une nette concentration dans la plage 20 – 24 €, la valeur la plus fréquente étant 21,50 €. La majorité des montants est donc relativement faible : le centre de l'intervalle de variation est 23 € et seulement 30 % des montants sont supérieurs à cette valeur, un quart étant supérieurs à 23,35 €.

   Le montant moyen est 21,84 €, avec un écart type de 2,39 €. La dispersion relative est donc faible (le coefficient de variation est de 11 %). Un montant typique est compris entre 19,45 € et 24,23 €.

Exercice n° 3

Cet exercice est repris du devoir 4.

1. L'objectif est de voir s'il est possible d'estimer le loyer à partir de la surface. Nous placerons en abscisses la variable explicative (la surface – x) et en ordonnées la variable expliquée (le loyer – y) :



Graphique 3 : nuage de points Surface × Loyer (en bleu).

2. L'effectif de la série (c'est-à-dire le nombre de points) est $n = 8$.
   Les coordonnées du point moyen du nuage sont les moyennes de x et de y :
   $$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{320}{8}=40\text{ m}^2$$
   $$\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{3040}{8}=380\text{ €}$$
   La droite de régression du loyer (variable y) en fonction de la surface (variable x) a une équation de la forme : $y=a\cdot x+b$ où :
   $$a=\frac{cov(x\,;y)}{V_x} \quad \text{et} \quad b=\bar{y}-a\cdot\bar{x}$$
   Il faut donc calculer la covariance de x et de y ainsi que la variance de x :
   $$cov(x\,;y)=\frac{\sum x_i\cdot y_i}{n}-\bar{x}\cdot\bar{y}=\frac{127200}{8}-40\times 380=700$$
   $$V_x=\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2=\frac{13650}{8}-40^2=106{,}25$$
   D'où les paramètres de la droite de régression :
   $$a=\frac{cov(x\,;y)}{V_x}=\frac{700}{106{,}25}\approx 6{,}588$$
   $$b=\bar{y}-a\cdot\bar{x}=380-6{,}588\times 40\approx 116\text{ €}$$
   Donc la droite de régression du loyer en fonction de la surface a pour équation :
   $$\mathrm{D}_{y(x)}\ :\ y=6{,}588\,x+116$$

3. Pour tracer la droite $D_{y(x)}$, il suffit d'en déterminer deux points. Par exemple :
   - Si $x = 20$, $\hat{y}=6{,}588\times 20+116\approx 248$ €.
   - Si $x = 60$, $\hat{y}=6{,}588\times 60+116\approx 511$ €.

   Voir le graphique 3 (en rouge).

4. Pour estimer le loyer d'un appartement dont la surface (x) serait de 50 m², on se sert de l'équation de la droite de régression :
   $$\hat{y}=6{,}588\times 50+116\approx 445\text{ €}.$$
   On peut aussi estimer le loyer sur le graphique : il suffit de chercher l'ordonnée du point de la droite de régression dont l'abscisse est 50 €.

5. Le coefficient de corrélation linéaire est :
   $$r=\frac{cov(x\,;y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}$$
   Il faut donc calculer les écarts types de x et de y :
   - écart-type de x : $\sigma_x=\sqrt{V_x}=\sqrt{106{,}25}\approx 10{,}31$
   - variance de y : $V_y=\dfrac{\sum y_i^2}{n}-\bar{y}^2=\dfrac{1210200}{8}-380^2=6875$
   - écart-type de y : $\sigma_y=\sqrt{V_y}=\sqrt{6875}\approx 82{,}92$

   Donc le coefficient de corrélation est :
   $$r=\frac{cov(x\,;y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{700}{10{,}31\times 82{,}92}\approx 0{,}82$$
   r est assez proche de 1. Nous avons donc une bonne corrélation positive, qui est cependant loin d'être excellente, ce qui est confirmé par l'aspect du graphique : les points sont globalement proches de la droite de régression mais ne sont pas alignés dessus.