Énoncé

UNIVERSITE DE LILLE III – UFR LEA — Année universitaire 2011/2012

Licence 1 - semestre 2 – session 2

Mathématiques

Nombre de pages : 2

Durée : 1 h — Documents autorisés : aucun

Il y a deux graphiques à réaliser. Veuillez donc respecter les indications de l'énoncé afin de pouvoir les placer tous deux sur la page 4.
Les trois exercices sont indépendants. Il n'est pas obligatoire de les traiter dans l'ordre de l'énoncé.
Rédigez soigneusement mais de façon concise. Tout résultat doit être justifié.

N'oubliez pas d'indiquer votre numéro d'étudiant sur la page 3
et de rendre les pages 3 et 4 avec votre copie.

Exercice n° 1

On sait que l'offre et la demande d'un bien sont les fonctions suivantes de son prix unitaire p :

- **Offre :** $O(p)=0{,}1\,p^2+2\,p$
- **Demande :** $D(p)=1200-12\,p$

(pour un prix unitaire p compris entre 0 et 100 €)

1. Calculez l'élasticité de la demande en fonction du prix unitaire.
2. Étudiez la fonction d'offre puis représentez-la graphiquement.
   Échelle : 1 cm pour 10 € en abscisses ; 1 cm pour 100 unités en ordonnées.
3. Ajoutez sur le graphique précédent la représentation de la fonction de demande.
4. Déterminez le prix d'équilibre du bien. Quelle est la quantité échangée à l'équilibre ?
5. Vérifiez votre résultat sur le graphique.

Exercice n° 2

Le gérant d'une supérette a relevé le montant (en euros) payé en caisse par un échantillon de 250 clients. Les résultats sont regroupés dans ce tableau :

Montant (x)	[0 ; 10 [	[10 ; 30 [	[30 ; 50 [	[50 ; 75 [	[75 ; 100 [	**Total**
Effectif (n_i)	55	75	50	55	15	250
Fréquence (f_i)	22,0%	30,0%	20,0%	22,0%	6,0%	100,0%

1. Représentez cette série sous la forme d'un histogramme.
   Échelle : 1 cm pour 10 € en abscisses.
2. Quelle est la classe modale ?
3. On donne : $\sum_i n_i \cdot x_i = 8\ 525$ et $\sum_i n_i \cdot x_i^2 = 441\ 062{,}5$

Déduisez-en la moyenne, l'écart type et le coefficient de variation.

4. En vous aidant du graphique, des indicateurs que vous avez calculés et des quartiles (on donne : $Q_1 = 12,00$ €, $Q_2 \approx 28,67$ €, $Q_3 \approx 53,41$ €), commentez cette distribution.

Exercice n° 3

Le graphique n° 1 page 3 retrace l'évolution du nombre d'entrées dans les salles de cinéma françaises entre 1995 et 2009 (source : CNC) :

- En abscisses : x est le rang de l'année (1995 étant l'année 0, 1996 l'année 1…).
- En ordonnées : y est le nombre d'entrées (en millions).

1. On propose les quatre valeurs suivantes pour le coefficient de corrélation linéaire :

   $r_1 = +0,36$
   $r_2 = -0,23$
   $r_3 = +0,86$
   $r_4 = -0,90$

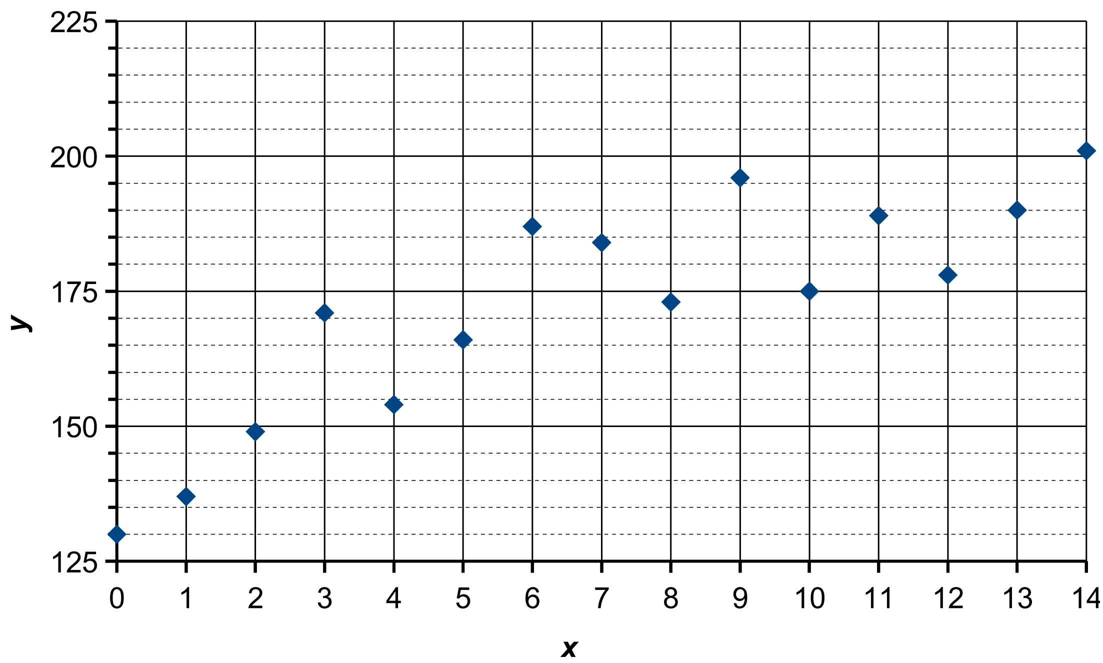
   Sans calculs, indiquez celle qui vous semble la plus vraisemblable. Pourquoi ?

2. Voici quatre équations de droites :

   $D_1 : y = 2x + 175$
   $D_2 : y = 4x + 145$
   $D_3 : y = 4x + 130$
   $D_4 : y = 5x + 130$

   a) Représentez ces quatre droites sur le graphique n° 1.
   b) Indiquez celle qui vous semble la plus proche de la droite de régression de y en fonction de x. Justifiez votre réponse.
   c) Interprétez son équation.

Numéro d'étudiant : ____________________



Graphique n° 1 : le nuage de points

Corrigé

Exercice n° 1

1. L'élasticité de la demande en fonction du prix unitaire s'obtient par la formule suivante :
   $e(D\,;p)=D'(p)\cdot\frac{p}{D(p)}$
   Il faut donc d'abord calculer la dérivée de la demande :
   $D'(p)=0-12\times1=-12$
   D'où l'élasticité :
   $e(D\,;p)=-12\cdot\frac{p}{1200-12\,p}=\frac{-12\,p}{1200-12\,p}$
   On peut éventuellement la simplifier en factorisant numérateur et dénominateur par 12 :
   $e(D\,;p)=\frac{12\cdot(-p)}{12\cdot(100-p)}=\frac{-p}{100-p}$

2. Étude de la fonction d'offre :
   - Ensemble de définition : [0 ; 100] selon l'énoncé.
   - Dérivée : $O'(p)=0{,}1\times2\,p+2\times1=0{,}2\,p+2$
   - Signe de la dérivée :
     Comme $p \geqslant 0$ on a : $0{,}2p \geqslant 0$ et $0{,}2p + 2 \geqslant 2 > 0$ donc $O'(p) > 0$.
     La fonction d'offre est donc strictement croissante sur [0 ; 100].
   - Tableau de variations :

p	0	100
O'(p)	+	
O(p)	0 ↗	1 200

   $O(0)=0{,}1\times0^2+2\times0=0$
   - $O(100)=0{,}1\times100^2+2\times100=1\ 200$

   Pour tracer la courbe représentative de cette fonction, il faut calculer les coordonnées de quelques points supplémentaires :

p	0	20	40	60	70	100
O(p)	0	80	240	480	630	1 200

   Voir le graphique n° 2 page suivante.

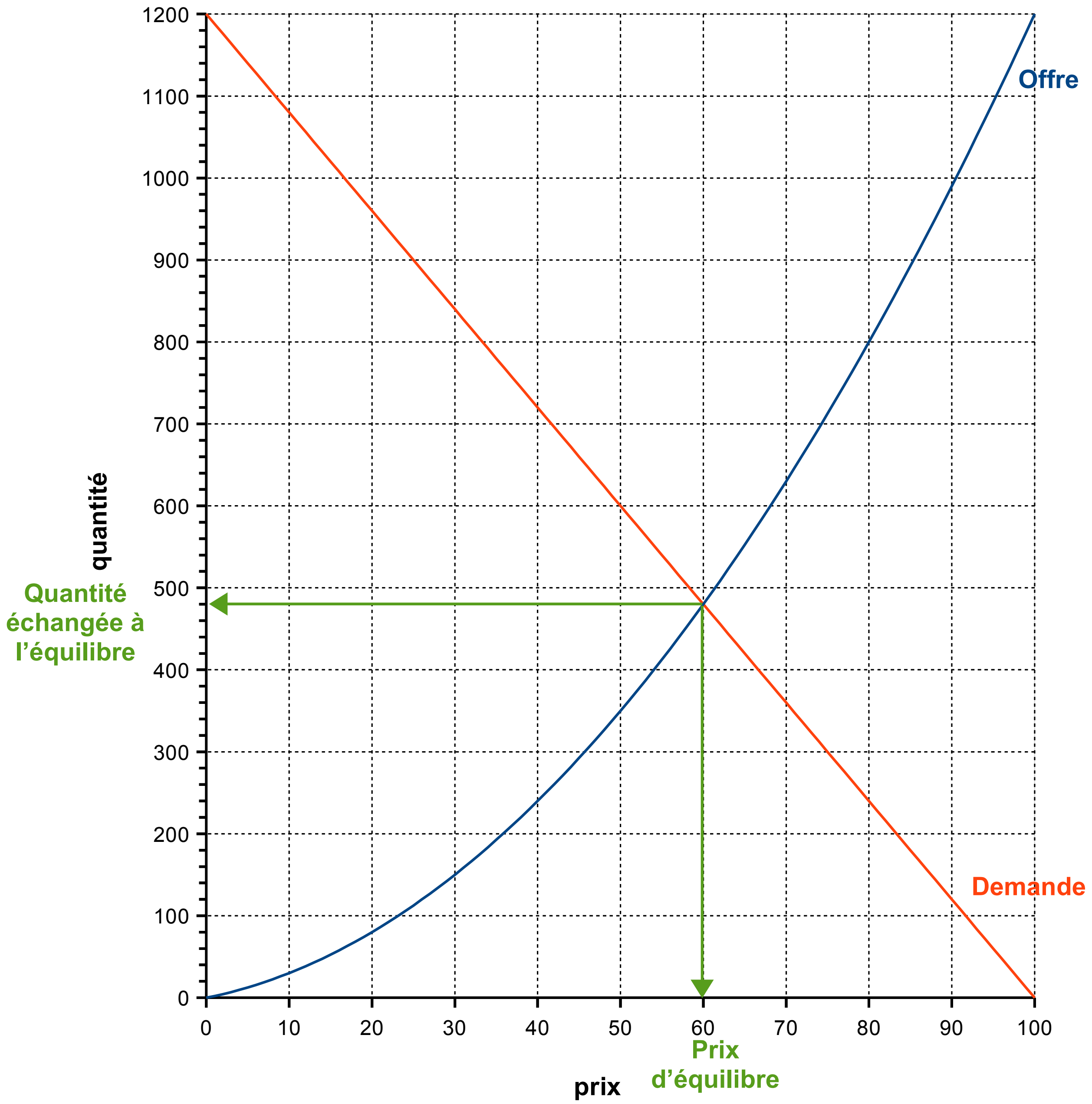
3. La fonction de demande est une fonction affine. Sa représentation graphique est donc une droite et il suffit de disposer des coordonnées de deux points pour la tracer. Par exemple :

p	0	100
D(p)	1 200	0

4. Le prix d'équilibre du bien est défini par l'égalité entre offre et demande. Pour le déterminer, il faut donc résoudre l'équation suivante :
   $O(p)=D(p)$ soit $0{,}1\,p^2+2\,p=1200-12\,p$
   Ou encore : $0{,}1\,p^2+2\,p-1200+12\,p=0$
   $0{,}1\,p^2+14\,p-1200=0$
   Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 2. Ses coefficients sont $a = 0{,}1$, $b = 14$ et $c = -1200$. Son discriminant est donc :
   $\Delta=b^2-4\,a\,c=14^2-4\times0{,}1\times(-1200)=196+480=676$

Il est positif. L'équation a donc deux solutions :
$p_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-14-\sqrt{676}}{2\times 0{,}1}=-200$ et $p_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-14+\sqrt{676}}{2\times 0{,}1}=60$
Seule la seconde fait partie de l'ensemble de définition. Le prix d'équilibre est donc 60 €.
La quantité échangée à l'équilibre est la valeur commune à l'offre et à la demande :
$O(60)=D(60)=1200-12\times 60=480$ unités

5. On vérifie le résultat sur le graphique en remarquant que le point d'intersection des deux courbes a pour abscisse le prix d'équilibre (on lit bien 60 €) et pour ordonnée la quantité échangée (480 unités).



Graphique n° 2 : les fonctions d'offre et de demande

Exercice n° 2

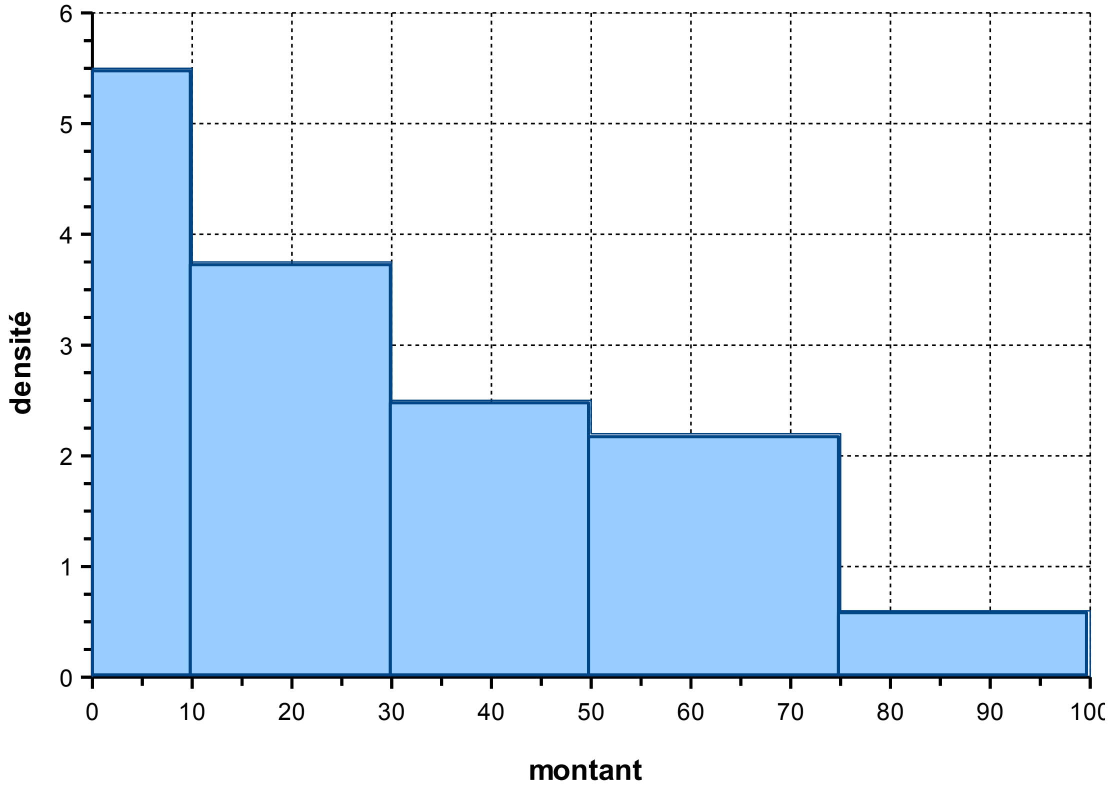
1. Comme les classes n'ont pas toutes la même amplitude, pour tracer l'histogramme, il faut calculer leurs amplitudes et densités :

Montant (x)	[0 ; 10 [	[10 ; 30 [	[30 ; 50 [	[50 ; 75 [	[75 ; 100 [	Total
Effectif (n_i)	55	75	50	55	15	250
Fréquence (f_i)	22%	30%	20%	22%	6%	100%
Amplitude (Δ_i)	10	20	20	25	25	100
Densité (d_i)	5,5	3,75	2,5	2,2	0,6	2,5

Par exemple, pour la classe [0 ; 10[, on obtient :

- amplitude : $\Delta_1 = 10 - 0 = 10$ €
- densité : $d_1 = \frac{n_1}{\Delta_1} = \frac{55}{10} = 5{,}5$

D'où l'histogramme :



Graphique n° 3 : l'histogramme des montants

2. La classe modale est la classe de plus forte densité, donc celle qui correspond au rectangle le plus haut sur l'histogramme. C'est donc la classe [0 ; 10 [.

3. La formule donnant la moyenne est :
$$\bar{x} = \frac{\sum n_i \cdot x_i}{N} = \frac{8525}{250} = 34{,}10 \text{ €}.$$
La variance s'obtient par le calcul suivant :
$$V_x = \frac{\sum n_i \cdot x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{441062{,}5}{250} - 34{,}10^2 \approx 601{,}44$$
L'écart type est la racine carrée de la variance :
$$\sigma_x = \sqrt{V_x} = \sqrt{601{,}44} \approx 24{,}52 \text{ €}.$$
Le coefficient de variation est égal au rapport de l'écart type à la moyenne :
$$C = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{24{,}52}{34{,}10} \approx 0{,}72 \text{ ou } 72\ \%.$$

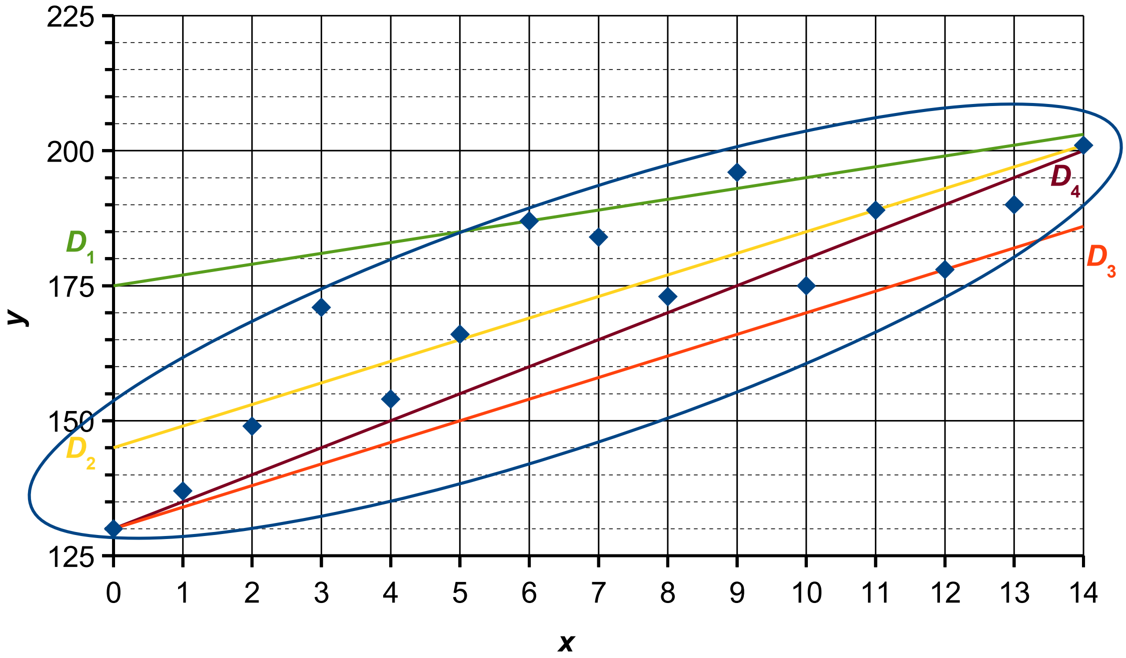
4. Commentaire :

Le commentaire doit faire apparaître les éléments suivants :

- **l'étendue de la série (de 0 à 100 €) ;**
- **la classe modale (intervalle de montant le plus fréquent) : de 0 à moins de 10 € ;**
- **la moyenne (34,10 €) et l'écart type (24,52 €) ;**
- **la forte asymétrie gauche du graphique.**

Voici une proposition de rédaction :
Les montants observés vont de 0 à 100 €. Il faut cependant remarquer que l'intervalle le plus fréquent va de 0 à 10 €, un quart des montants étant inférieurs à 12,00 €. À l'inverse, il n'y a qu'un quart des montants qui dépassent 53,41 € et seulement 6 % qui sont supérieurs à 75 €.
La distribution est donc fortement asymétrique, avec décalage vers la gauche, ce qui est confirmé par le fait que la médiane (28,67 €) est inférieure à la moyenne (34,10 €).
La dispersion de la série est forte, avec des montants typiques compris entre 9,58 € (34,10 – 24,52) et 58,62 € (34,10 + 24,52). Ils correspondent donc essentiellement à la deuxième et à la troisième classe.

Exercice n° 3



Graphique n° 1 : le nuage de points

1. La forme du nuage est très étirée (voir l'ellipse sur le graphique) ; les points se rapprochent d'une droite ascendante. Nous avons donc une bonne corrélation positive : la valeur de r doit donc être très proche de +1. La seule valeur acceptable parmi les quatre proposées est donc $r_3 = +0,96$.
   Les valeurs $r_1 = +0,36$ et $r_2 = -0,23$ sont proches de 0, elles correspondraient donc à un nuage très diffus. r_4, elle, est proche de –1 ; elle correspondrait donc à une très bonne corrélation négative : le nuage serait proche d'une droite descendante.

2.
   a) Pour tracer les quatre droites sur le graphique, il suffit à chaque fois de calculer les coordonnées de deux points :

D_1 :

x	0	10
y	175	195

D_2 :

x	0	10
y	145	185

D_3 :

x	0	10
y	130	170

D_4 :

x	0	10
y	130	180

b) La droite de régression de y en x est celle qui, globalement s'approche le mieux de l'ensemble des points du nuage. Il s'agit donc de D_2.
   D_1 est très nettement au-dessus du nuage, alors que D_3 est en dessous. Quant à D_4, son coefficient directeur est trop élevé : elle est en dessous du nuage pour les petites valeurs de x et au-dessus pour les plus grandes.
c) L'équation de la droite de régression est : $y = 4x + 145$
   Elle correspond à une tendance linéaire, avec comme valeur initiale 145 millions d'entrées l'année 0 (1995) et une augmentation de 4 millions d'entrées chaque année.