

INTÉRÊTS SIMPLES, INTÉRÊTS COMPOSÉS

I. Résoudre un exercice d'intérêts simples :

- **Exemple :** on place un capital de 8 000 € pendant 72 jours au taux annuel de 6,5 %. Calculer l'intérêt et la valeur acquise à l'issue du placement.

- **Méthode :** on utilise la formule $I = Ctn$ avec :

I : intérêt C : capital placé t : taux périodique n : nombre de périodes

Remarque : n en jours $\Rightarrow t = \frac{\text{taux annuel}}{360}$ n en mois $\Rightarrow t = \frac{\text{taux annuel}}{12}$

Enfin : $\text{Valeur acquise} = \text{Capital} + \text{Intérêts}$

- **Solution :** $I = 8000 \times \frac{0,065}{360} \times 72 = 104 \text{ €}$

Valeur acquise : $8\ 000 + 104 = 8\ 104 \text{ €}$.

II. Comparer deux placements à intérêts simples :

- **Exemple :** on possède un capital de 1 800 €. Deux options de placement sont proposées :

- pas de frais, taux annuel de 5 %

- 40 € de frais fixe pris sur le capital, taux annuel de 9 %

Exprimer les valeurs acquises $f(x)$ et $g(x)$ pour chaque option après x jours de placement, pour $x \in [0; 300]$. Représenter graphiquement. Comparer les placements.

- **Solution :**

premier placement :

$$f(x) = 1800 + 1800 \times \frac{0,05}{360} x$$

$$f(x) = 0,25x + 1800$$

deuxième placement :

$$g(x) = 1760 + 1760 \times \frac{0,09}{360} x$$

$$g(x) = 0,44x + 1760$$

L'abscisse x de l'intersection est donnée par

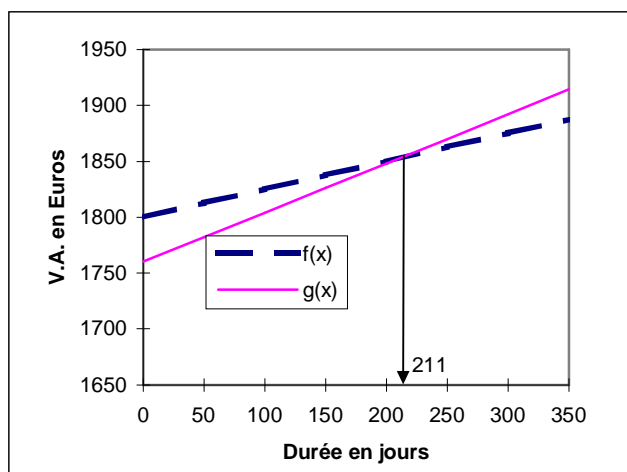
l'équation $f(x) = g(x)$, c'est-à-dire :

$$0,25x + 1800 = 0,44x + 1760$$

$$0,44x - 0,25x = 1800 - 1760$$

$$0,19x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{0,19} = 210,52 \Rightarrow x \approx 211$$

Conclusion : à partir du 211^e jour, le deuxième placement $g(x)$ est plus intéressant.



III. Calculer la valeur acquise à intérêts composés

- **Exemple :** Calculer la valeur acquise d'un capital de 8 000 € placé pendant 5 ans au taux annuel de 6,5 %. En déduire le montant des intérêts. (capitalisation annuelle)

- **Méthode :** on utilise la formule $C_n = C_0(1+i)^n$ avec :

C_n : valeur acquise C_0 : capital placé i : taux périodique n : nombre de périodes

- **Solution :** $C_5 = 8\ 000(1 + 0,065)^5$

$$C_5 = 8000 \times 1,065^5 \approx 10960,69 \text{ €}$$

$$I = 10960,69 - 8000 = 2960,69 \text{ €}$$

IV. Calculer un taux à intérêts composés :

- **Exemple :** Un capital de 12 000 € est placé pendant 4 ans ; la capitalisation des intérêts est mensuelle. A l'issue du placement, la valeur acquise se monte à 15 245,87 €. Calculer le taux mensuel i_m de l'intérêt.

- **Méthode :** $C_n = C_0(1+i_m)^n \Leftrightarrow \frac{C_n}{C_0} = (1+i_m)^n \Leftrightarrow 1+i_m = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}}$

- **Solution :** n étant le nombre de mois on a ici $n = 4 \times 12 = 48$.

On a l'équation $15\,245,87 = 12\,000(1+i_m)^{48}$

D'où $(1+i_m)^{48} = \frac{15\,245,87}{12\,000} \Rightarrow 1+i_m = \left(\frac{15\,245,87}{12\,000}\right)^{\frac{1}{48}}$

Ce qui donne $1+i_m = 1,005$ et donc $i_m = 0,005 = 0,5\%$ par mois.

V. Calculer un taux équivalent à intérêts composés :

- **Exemple :** Un capital C_0 est placé pendant n années, au taux annuel de 4 %. Calculer le taux équivalent trimestriel i_t .

- **Solution :** on utilise la formule $C_n = C_0(1+i)^n$.

Le nombre de trimestres de placement étant égal à $4 \times n$, on a l'équation :

$$C_n = C_0(1+i)^n = C_0(1+i_t)^{4n}$$

Soit ici : $C_n = C_0(1,04)^n = C_0(1+i_t)^{4n}$

D'où : $(1+i_t)^{4n} = (1,04)^n \Leftrightarrow (1+i_t)^4 = 1,04$

Et : $1+i_t = (1,04)^{\frac{1}{4}} \approx 1,00985$

On en déduit $i_t \approx 0,00985 = 0,985\%$ par trimestre.

Ne pas confondre avec le taux proportionnel qui vaut ici $\frac{4\%}{4} = 1\%$ par trimestre.

VI. Calculer la durée d'un placement à intérêts composés :

- **Exemple :** Un capital de 7 000 € est placé à un taux annuel de 6 %. La capitalisation des intérêts est mensuelle. La valeur acquise se monte à 10 642,59 €.

Calculer en mois puis en années, la durée du placement (utiliser les taux proportionnels).

- **Méthode :** on part de la formule des intérêts composés

$$C_n = C_0(1+i)^n \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow \ln(1+i)^n = \ln \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow n \ln(1+i) = \ln \frac{C_n}{C_0} \Leftrightarrow n = \frac{\ln \frac{C_n}{C_0}}{\ln(1+i)}$$

- **Solution :** le taux mensuel proportionnel vaut $\frac{6\%}{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005$

Ici on a l'équation : $10\,642,59 = 7\,000(1+0,005)^n$

D'où : $(1+0,005)^n = \frac{10\,642,59}{7\,000}$

On passe en logarithmes : $\ln(1+0,005)^n = \ln \frac{10\,642,59}{7\,000} \Rightarrow n \ln(1,005) = \ln \frac{10\,642,59}{7\,000}$

D'où $n = \frac{\ln \frac{10\,642,59}{7\,000}}{\ln(1,005)} = \frac{\ln(10\,642,59) - \ln(7\,000)}{\ln(1,005)} \Rightarrow n = 84$ mois, soit 7 années.